UNIVERSIDAD DE PANAMA

VICERRECTORIA DE INVESTIGACION Y POSTGRADO

PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA

EL PROBLEMA DE STURM LIOUVILLE

ANGEL ENRIQUE GONZALEZ GAITAN

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIZACION EN MATEMATICA PURA

PANAMA REPUBLICA DE PANAMA

2008

Título de la Tesis **EL PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE**

Presentada por el estudiante **ANGEL E GONZALEZ G**

TESIS

Sometida para optar al título de Maestría en Matemática

Vicerrectoría de Investigación y Postgrado

Facultad de Ciencias Naturales Exactas y Tecnología

APROBADO POR

Doctor Rogelio Rosas
Presidente

Profesor Omar Oliveros
Miembro

Profesora María Dixiana Espinossa
Miembro

REFRENDADO POR

REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORÍA
DE INVESTIGACION Y POSTGRADO

FECHA

INDICE

CAPITULO TERCERO

DEDICATORIA

**A Dios por estar siempre a mi lado,
y por permitirme culminar una
parte importante de mi vida**

**A mi esposa Nisla por estar conmigo en mis
momentos de flaquezas y alegrias, pieza
fundamental en la que pude apoyarme
siempre**

**A mis hijos Angel Irina y Fabricio
fuente de deseo de superacion
que me motivaron para poder
brindarles un ejemplo digno**

AGRADECIMIENTO

Al Doctor Rogelio Rosas forjador de una nueva generacion de matematicos, quien con sus atinadas orientaciones nos permitio visualizar la matematica desde un punto diferente.

RESUMEN

Este estudio centra su atencion en problemas de Ecuaciones Diferenciales con valor en la frontera estando presentes operadores diferenciales lineales auto adjuntos con funciones propias mutuamente ortogonales que son conocidas como los problemas de Sturm Liouville asi como en las aplicaciones de las mismas siendo este el tema principal del trabajo razon por la cual creemos conveniente ofrecer un entorno de entendimiento de las Ecuaciones Diferenciales y de las Ecuaciones Integrales

El problema de Sturm Liouville queda dentro de la teoria general de ecuaciones diferenciales En particular una ecuacion general de segundo orden con un parametro que a partir de la transformacion de Liouville es la forma canonica denominada ecuacion diferencial de Sturm Liouville

De modo que la ecuacion diferencial de Sturm Liouville enfrenta el problema de condiciones iniciales y el problema de condiciones de frontera El primero absorbe los teoremas de existencia y unicidad basicos de las ecuaciones diferenciales ordinarias El segundo problema, trata con los teoremas de oscilacion y comparacion

SUMMARY

This study focus on problems with values on the bounds being present differential linear self adjunt operators with mutually orthogonal own functions that are known as the problems of Sturm Liouville such as in their applications being this the main topic of the paper that s why we believe its convenient to offer a view of comprehension of the Differential Equations and the Integral Equations

The problem of Sturm Liouville is inside the general theory of the Differential Equations

In particular a second order general equation with a parameter that, since the transformation of Liouville is of the canonical form which is denominated Sturm Liouville differential equation So that, the Sturm Liouville differential equation faces two problems the problem of the initial conditions and the problem of bounds The first one absorbs the existence theorems and basic uniqueness of the ordinary differential equations The second one concerns the oscilations and comparation theorems

INTRODUCCION

El problema de Sturm Liouville es poco tratado en este pais se realiza la presente investigación para mostrar su gran utilidad y ensenar a futuros investigadores sobre la necesidad de trabajar mas sobre teorias que darian muchas satisfacciones a nuestras instituciones universitarias y no universitarias

Se aborda el desarrollo del tema de acuerdo con los objetivos siguientes

- Estimular la capacidad universitaria para la investigacion cientifica y desarrollo tecnologico
- Promover en los estudiantes de matematica la importancia de las teorias matematicas que sustentan y dan soluciones al desarrollo de la ciencia y tecnologia
- Investigar sobre las aplicaciones que proporcionan el Problema Regular de Sturm Liouville
- Desarrollar en forma clara y precisa el problema de condiciones de frontera que den como resultado una aplicacion util

Esta investigacion es de gran importancia en la matematica aplicada a la ingenieria Su desarrollo muestra la aplicacion necesaria para el desarrollo de la ciencia y tecnologia

Este trabajo lo componen tres capitulos divididos del modo siguiente

En el primer capitulo se describe el problema de Sturm Liouville sus aspectos historicos se detallan los métodos para su solucion algunas propiedades y teoremas tambien se resuelven problemas con la finalidad de que sus resultados sean de utilidad en las aplicaciones que se dan en el capitulo tercero

El segundo capitulo desarrolla en los Espacios de Hilbert la teoria pertinente de este trabajo tratando temas como la teoria de operadores Autoadjuntos la teoria Espectral para operadores normales los Hermitianos etc

El tercer capitulo contiene un estudio sobre las ecuaciones Integrales de Fredholm y sus diferentes tipos que van a ser muy utiles

La revision de la literatura existente ha sido y es fundamental durante todo el proceso de investigacion dando como resultado la confeccion del marco de referencia, lo mas amplio posible y finalmente el desarrollo del tema y las aplicaciones

CAPITULO PRIMERO

PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

I PROBLEMA DE STURM LIOUVILLE
ASPECTOS HISTORICOS

El Trabajo de Sturm desarrollado en el siglo XIX [Sturm 1836] trato acerca de los Teoremas de Oscilacion y Comparacion para una ecuacion diferencial ordinaria lineal homogenea En la misma epoca, Liouville publica dos artículos [Liouville 1837a] y [Liouville 1837b] en donde expone la forma asintotica de las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con un parametro caracteristico [BOMBAL 1995] El resultado de estos dos trabajos fue el planteamiento del Problema Regular de Sturm Liouville

1 1 EL PROBLEMA REGULAR El problema de Sturm Liouville regular se determina mediante una ecuacion diferencial con condiciones iniciales un conjunto de ecuaciones lineales homogeneas que son las condiciones a la frontera y las condiciones de finitud

TEOREMA 1 1 1 Dada la ecuacion diferencial

$$\frac{d\left[r(x)y'\right]}{dx}+\left[q(x)+\lambda p(x)\right]y=0 \tag{1 1}$$

en la cual *r(x) y p(x)* son continuas sobre el intervalo cerrado $a \le x \le b$ y *q(x)* es continua por lo menos en el intervalo abierto a<x<b Si $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ son los valores del parametro λ que dan lugar a soluciones no triviales de esta ecuacion con primeras derivadas continuas y que satisfacen las condiciones en la frontera

$$\begin{aligned} a_1 y(a) - a\ y\ (a) &= 0 \\ b_1 y(b) - b_2 y'(b) &= 0 \end{aligned} \tag{1 2}$$

en donde $a_1\ a_2\ b_1\ b_2$ son constantes cualesquiera tales que ni a_1 y a_2 ni b_1 y b_2 son cero simultaneamente y si $y_1\ y_2\ y_3$ son soluciones correspondientes a estos valores λ entonces las funciones $\{y\ (x)\}$ forman un sistema ortogonal con respecto a la funcion de peso p(x) en el intervalo (a, b)

Aclaracion Las soluciones de la ecuacion (1 1) pertenecen al espacio vectorial de las funciones definidas en [a, b] que son continuas lo mismo que su derivada primera, mientras que la derivada segunda es continua en (a, b)

En este espacio se define un producto interno

$$\langle f\ g\rangle = \int_a^b p(x)f(x)\overline{g(x)}dx$$

siempre que p(x) > 0 en (a b)

Es con respecto a este producto interno que las soluciones y_1 y_2 son ortogonales en el sentido $\langle y\ \ y_j\rangle = 0$ para $i \neq j$

TEOREMA 1 1 2 Dada la Ecuacion Diferencial

$$\frac{d^2[r(x)y\ ]}{dx^2}+[q(x)+\lambda p(x)]\,y=0$$

en la cual $r(x\,)$ y $p(x)$ son funciones continuas sobre el intervalo cerrado [a b] y $q(x)$ es continua por lo menos en el intervalo abierto (a, b)

Si λ_1 λ_2 son los valores del parametro λ que dan lugar a soluciones no triviales de esta ecuacion que poseen terceras derivadas continuas y que satisfacen las condiciones en la frontera

$$a\ y(a)-\alpha_1(ry\ )'\,|_{=a}=0 \qquad\qquad a\ y\,(a)-\alpha_2(ry\ )|_{=a}=0$$
$$b_1y(b)-\beta_1(ry\ )\ |_{=b}=0 \qquad\qquad b\ y\,(b)-\beta\ (ry\ )|_{\ b}=0$$

en donde ni a y α ni b y β son cero simultaneamente y si $y_1\ y_2\ y_3$ son las soluciones no triviales correspondientes a estos valores de λ, entonces $\{y\ (x)\}$ forman un sistema ortogonal con respecto a la funcion de peso $p(x)$ sobre el intervalo $(a\ \ b)$

Observe el siguiente ejemplo Sea $p \in C^{(1)}(I)$ $q \in C(I)$ λ un numero real y $p(x) > 0$ para todo $x\in I$ Siendo α_1 α_2 β_1 β_2 cuatro numeros reales tales que

$\alpha_1 + \alpha_2 > 0 \qquad \beta_1 + \beta_2 > 0$ Puesto $L(y) = (py) + qy$

1 2 ECUACION DIFERNCIAL DE STURM LIOUVILLE

Considerese la ecuacion

$$\frac{-1}{r(x)}\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = \lambda y \qquad (1\ 2)$$

donde $a \leq x \leq b$

El problema de Sturm Liouville queda dentro de la teoria general de ecuaciones diferenciales En particular una ecuacion general de segundo orden con un parametro por medio de la transformación de Liouville se puede reducir a la forma canonica (1 2) denominada ecuacion diferencial de Sturm Liouville De modo que la ecuacion diferencial de Sturm Liouville enfrenta los problemas de condiciones iniciales y de condiciones a la frontera El primero absorbe los teoremas de existencia y unicidad basicos de las ecuaciones diferenciales ordinarias El segundo trata con los teoremas de oscilacion y comparacion

Condiciones de frontera

Las condiciones a la frontera que se imponen en a y b

$$\begin{aligned} y(a)\cos\alpha + p(a)y(a)sen\alpha = 0 \\ y(b)\cos\beta + p(b)y(b)sen\beta = 0 \end{aligned} \qquad (1\ 3)$$

Condiciones de finitud

Las condiciones de Finitud establecidas como

a) a y b son finitos

b) $p(x)$ $q(x)$ y $r(x)$ definidas en el intervalo cerrado I = [a, b] son continuas excepto para un numero finito de saltos Se considera a $p(x)$ y $r(x)$ funciones estrictamente positivas

TEOREMA 1 3 (Teorema de Separacion de Sturm)

Sean u y v soluciones reales linealmente independientes de

$$\frac{d\ y}{dx}+a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)=0 \quad \text{donde } a(x) \text{ y } b(x) \text{ son continuas}$$

Entonces los ceros de u y v estan alternados

TEOREMA 1 4 (Teorema de Comparacion)

Sean u y v soluciones reales no triviales de

$$\frac{d\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]}{dx}+q(x)u=0 \tag{1 5}$$

y

$$\frac{d\left[p(x)\frac{dv}{dx}\right]}{dx}+q_1(x)u=0 \tag{1 6}$$

donde $p(x)$ dp/dx $q(x)$ y $q_1(x)$ son continuas $p(x)>0$ y $q_1(x)\geq q(x)$ para todo x

Si $x_1<x_2$ son ceros consecutivos de u entonces v se anula por lo menos una vez en $(x_1\ x_2)$ a menos que en ese intervalo tengamos $q(x)\equiv q_1(x)$ y $v(x)\equiv\alpha u(x)$ $\alpha\in R$

De acuerdo con lo anterior los valores caracteristicos estan indizados por el numero de oscilaciones es decir los ceros de sus funciones caracteristicas Los resultados que se tienen acerca de las posiciones relativas de los ceros de diferentes soluciones son de importancia primordial dentro de la teoria y los metodos numericos del problema de Sturm Liouville

De aqui que los resultados clasicos de oscilación y comparacion trataran con las cotas y relaciones diferenciales

1 3 APLICACIONES DE LAS OSCILACIONES

1 3 1 Velocidades Criticas de un eje Rotativo y Oscilaciones Transversas de una Viga

El problema de vibraciones mecanicas y las oscilaciones transversas de una barra puede ser reducido a una ecuacion integral homogenea de Fredholm de segunda clase o sea a una ecuación

$$z(x) - w^2 \int_0^1 G(x\ y)u(y)z(y)dy = 0 \qquad (1\ 7)$$

Aqui w es la velocidad angular del eje (o respectivamente la frecuencia angular de las vibraciones de la viga) *u(x)* es la densidad lineal entonces *u(x)dx* es la masa entre *x* y *x+dx* y *G(x y)* es la funcion influencia de la barra Ya que *u(x)>0* si ponemos $\sqrt{u(x)z(x)} = \phi(x)$ obtenemos una ecuacion integral homogenea

$$\phi(x) - w \int k(x\ y)\phi(y)dy = 0$$

Con el nucleo simétrico

$$k(x\ y) = \sqrt{u(x)u(y)}G(x\ y) \qquad (1\ 8)$$

Este hecho es importante para probar la existencia de un numero infinito de velocidades criticas (respectivamente de frecuencias naturales) $w = \sqrt{\lambda_h}$ relacionados con los valores caracteristicos (positivos) del nucleo simetrico (1 8)

Mas aun, podemos tambien obtener saltos mas elevados y mas bajos de estos valores caracteristicos etc Antes de entrar en detalles enfatizaremos algunas propiedades generales de la teoria del nucleo de elasticidad Primero es interesante notar que el operador de Fredholm de la primera clase $F^{(\ )}[\phi(y)] \equiv \int_0^1 k(x\ y)\phi(y)dy$ en el caso $K = G$ puede ser considerado como un operador funcional que transforma un sistema cargas distribuidas *ø(x)* actuando (paralela al eje *z*) en el salto correspondiente de este en el sentido que despues de la deformacion la forma del eje en el salto (que coincide inicialmente con el segmento $0 \le x \le 1$) sera la curva del plano representado por la ecuacion $Z = [\phi(y)]$

1 3 2 Oscilaciones transversas de una barra

El problema tecnicamente importante de oscilaciones transversas en una barra puede ser estudiado bajo condiciones muy generales por el metodo indicado (Ecuaciones de Fredholm) considerando la función de influencia $G(x\ y)$

Supongamos que en su estado de reposo el eje de la barra coincide con el segmento (0 l) del eje x y que la deflección paralela al eje z de un punto x al tiempo t es $z(x\ t)$ Entonces del principio de D Alembert obtenemos la ecuacion integro – diferencial

$$z\,(x\ t) = \int_0^l G(x\ y)\left[p(y) - \mu(y)\frac{d\ z}{dt^2}\right] dy \quad (0 \le x \le l) \tag{1 9}$$

donde $[p(y)]\ dy$ es la carga que actua en la porcion $(y\ \ y + dy)$ de la barra en la direccion 0_z y $\mu(y)dy$ es la masa de esta porcion

En particular en el caso importante de vibraciones armonicas

$$z(x\ t) = z(x)e \tag{1 10}$$

de una barra sin carga, $[\,p(y) \equiv 0]$ con $L=1$ obtenemos

$$z(x) - w \int_0^l G(x\ y)\mu(y)z(y)dy = 0 \tag{1 11}$$

la misma ecuación integral homogénea como en

$$z(x) = \int_0^l G(x\ y)p(y)dy \quad \text{donde} \quad 0 \le x \le l \tag{1 12}$$

El hecho de que la ecuacion (1 11) es la misma que la de (1 7) es muy interesante Por ejemplo esto muestra la posibilidad de determinar experimentalmente analisis armonicos mas simples de sus oscilaciones transversas

Ademas la ecuacion (1 11) muestra que nuestro problema de vibracion pertenece propiamente a la teoria de ecuaciones integrales de Fredholm Pero en algunos casos es posible obtener resultados bastante precisos aun por la teoria mas elemental de ecuaciones integrales de Volterra

Por ejemplo esto ocurre en el caso de una barra uniforme

$$\mu(x) = M \text{ Constante}$$

1 3 3 Oscilaciones forzadas de Amplitud finita

La utilidad de los resultados que se dan aqui pueden ser puntualizados aplicandolos a un celebre y dificil problema el estudio de las oscilaciones forzadas de amplitud finita de un pendulo que en la ausencia de una fuerza, son gobernados por una ecuacion no lineal

$$\frac{d\ \phi(t)}{dt} + \alpha^2 sen\phi(t) = F(t)$$

La mayor dificultad surge del hecho que para una α^2 dada y una funcion periodica dada *F(t)* podemos tener tambien resonancia o no resonancia dependiendo de la amplitud de las oscilaciones

1 3 4 Vibraciones de una Membrana

Como ejemplo trataremos el problema importante de las vibraciones de una membrana un problema que puede ser reducido a una ecuacion integral de Fredhom de dos dimensiones de la segunda clase

Una membrana, la contraparte de dos dimensiones de una cuerda, es una delgada capa elastica con rigidez insignificante cuya forma de equilibrio es una capa plana (el dominio *D* del plano *xy*)

Suponemos que la membrana esta sujeta en la frontera *s* del dominio *D* y a una tension uniforme τ Esto significa que si cortamos la membrana por cualquier curva regular σ (σ puede coincidir parcialmente o enteramente con una parte del contorno

s) entonces la accion mecanica de la parte de la membrana en un lado de σ sobre la otra parte que puede ser reemplazado por sistema de fuerzas normales (contenidas en el plano xy y dirigida hacia el lado nombrado proximamente de σ) de modo que la fuerza resultante que actua en cualquier elemento $d\sigma$ de σ tiene intensidad $\tau d\sigma$ donde τ es una constante

1 4 OPERADORES DIFRENCIALES LINEALES

DEFINICION 1 4 1 Llamaremos operadores diferenciales lineales a las transformaciones lineales que contienen el operador $D^1=D$ y sus potencias donde

$D^0 = f^{(0)} = I$ y $D\ (f) = f^{(n)}$ Tambien se supone $\frac{d}{dx} = D$

Los dominios de estas transformaciones lineales son los espacios $C^{(\ )}$

DEFINICION 1 4 2 Una transformacion lineal $L\ C^n(I) \to C(I)$ es un operador diferencial de orden n en el intervalo I si puede ser expresado en la forma

$$L = a\ (x)\frac{d}{dx} + a\ \ _1(x)\frac{d}{dx} + \quad + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)$$

donde los coeficientes $a\ (x)$ $a\ (x)$ son continuos en I y $a\ (x)$ no es identicamente nulo en I De modo que la imagen de una funcion f' en $C^n(I)$ bajo el operador diferencial lineal descrito es la funcion en $C(I)$ definida por

$$L[f(x)]=(L(f))\ (x) = a\ (x)\frac{d\ \ f(x)}{dx} + a\ \ (x)\frac{d\ \ \ f(x)}{dx^{\ 1}} + \quad + a_1(x)\frac{df(x)}{dx} + a\ (x)f(x)$$

1 5 VALORES PROPIOS DE UN OPERADOR

Considere el problema general de resolver una ecuacion de la forma $L[x] = \lambda\ x$ donde L es una transformacion lineal de S a V S es un subespacio de V y λ un parametro desconocido que puede tomar valores reales o complejos este se conoce como el problema del valor propio para el operador L y requiere que se encuentren todas las λ para las que $L[x] = \lambda x$ tiene soluciones no triviales y todas las soluciones correspondientes a estas λ

DEFINICIÓN 1 5 Sea L $S \rightarrow V$ un operador lineal Un vector $x \neq 0$ de S es un vector propio de L si y solo si existe un escalar λ talque $L[x] = \lambda x$

El escalar λ se llama valor propio de L

Se dice que el vector propio x corresponde al valor propio λ.

Si λ_0 es un valor propio para L y x_0 es un vector propio correspondiente a λ_0 entonces $L(\alpha x_0) = \alpha\, L(x_0) = \alpha(\lambda_0 x_0) = \lambda_0\, (\alpha x_0)$ para todos los numeros reales α.

Asi αx_0 tambien es un vector propio correspondiente a λ_0 siempre que $\alpha \neq 0$

1 6 EL OPERADOR DE STURM LIOUVILLE

1 6 1 El operador Autoadjunto de Segundo Orden

Examinaremos en detalle un problema de la teoria general de valores propios o de autovalores de un operador especial el cual sin lugar a dudas constituye una de las teorias mas interesantes de la Matematica Con tal proposito es util introducir la nocion de ecuacion diferencial autoadjunta.

DEFINICION 1 6 1 Una ecuacion diferencial lineal homogenea de segundo orden se dice una forma auto adjunta si y solamente si se tiene

$$p(x)y \; + p\,(x)y \; + \left[q(x) + \lambda w(x)\right] y = 0 \qquad \alpha < x < \beta \qquad \textbf{(1 13)}$$

donde $p(x)>0$ y $w(x)>0$ en $(\alpha\ \beta)$ y $p\,(x)$ $q(x)$ $w(x)$ son todas funciones definidas en el intervalo $[a\ b]$

Por sencillez de notacion la ecuacion (1 13) se suele representar como

$$p(x)y \; + p\,(x)y \; + q(x)y + \lambda w(x)y = 0 \qquad \textbf{(1 14)}$$

o también como una ecuacion diferencial lineal homogenea autoadjunta en la siguiente forma compacta

$$L(y) = \lambda w(x) y \qquad \textbf{(1 15)}$$

donde

$$L = p(x)\frac{d}{dx^2} + p\ (x)\frac{d}{dx} + q(x) \qquad \textbf{(1 16)}$$

Observese que L es un operador lineal definido en $C^{(2)}\left[a\ b\right]$ a valores en $C\left[a\ b\right]$

L se llama operador de Sturm Liouville y tiene muchas propiedades una de ellas es la de ser simetrico y se presenta de la siguiente manera

El problema homogeneo de Sturm Liouville es un problema de contorno en dos puntos constituido por la ecuacion (1 13) o sus equivalente (1 14) y (1 15) con las condiciones de contorno

$$a\ y(a) + a\ y\ (a) = 0 \qquad (1\ 17)$$
$$b_1 y(b) + b\ y\ (b) = 0 \qquad (1\ 18)$$

donde $a_1\ a_2\ b_1\ b_2 \in R$

Son muchos los fenomenos estudiados por ejemplo en la Fisica, que conducen a esta ecuacion diferencial y que han de verificar las condiciones de contorno **(1 17)** y **(1 18)**

CAPITULO SEGUNDO

ESPACIOS DE HILBERT

2 1 OERADORES AUTO ADJUNTOS

DEFINICION 2 1 1 Sea $(H +\ )$ un espacio vectorial sobre K (igual a R o C)

Llamaremos producto interno sobre K que denotaremos por $\langle\ \rangle$ a toda aplicacion

$\langle\ \rangle\ HxH \to K$ talque para toda $x\ y\ z \in H$ Para toda $\alpha\ \beta \in K$ se tiene

a) $\langle \alpha x+\beta y\ z\rangle = \alpha\langle x\ z\rangle + \beta\langle y\ z\rangle$

b) $\langle x\ y\rangle = \overline{\langle y\ x\rangle}\ \overline{\langle y\ x\rangle}$

c) $\langle x\ x\rangle > 0$ si $x \neq 0$

DEFINICION 2 1 2 Sean $x\ y$ vectores de un espacio con producto interno se dice que x e y son ortogonales si $\langle x\ y\rangle = 0$

DEFINICION 2 1 3 Sea H un espacio con producto interno Un subconjunto $\{U\ \}$ de H se llama ortogonal si $\langle U\ \ U_\beta\rangle = 0$ para $\alpha \neq \beta$

DEFINICION 2 1 4 Sea $(H\ \langle\ \rangle)$ un espacio con producto interno Un subconjunto $\{U\ \}$ de H se llama ortonormal si $\langle U\ \ U_\beta\rangle = \delta\ _\beta$ donde

$\delta\ _\beta = 1$ *si* $\alpha = \beta$ *o* *si* $\alpha \neq \beta$

Ejemplo En el espacio vectorial $C[a\ b]$ para toda $f\ g \in C[a\ b]$ la expresion $\langle f\ g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$ define un producto interno

DEFINICIÓN 2 1 5 Operadores Adjuntos

Sea H un espacio vectorial con producto interno y $L\ \ H \to H$ un operador lineal Un operador A es adjunto de L si para toda $x\ \ y \in L$ se tiene

$$\langle L(x)\ y\rangle = \langle x\ A(y)\rangle$$

El adjunto de L se indica L

DEFINICIÓN 2 1 6 Operadores Autoadjuntos

Un operador L es autoadjunto cuando esta dotado de un adjunto L y es igual a su adjunto L

Es decir $L = L$

Propiedades

1 Si A y B son adjuntos de L entonces $A=B$

2 L es lineal

3 $(L\ )\ = L$

4 $(L_1 + L_2\ )\ = L + L$

5 $(L_1L_2) = L_2L_1$

2 2 PROPIEDADES DE UN OPERADOR AUTOADJUNTO SIMETRICO

DEFINICIÓN 2 2 1 Un operador autoadjunto L se dice **simetrico** en el intervalo $[a\ b]$ si y sólo si

$$\int_a^b \left(uL[v] - vL[u]\right)dx = 0 \tag{2 1}$$

Para cualquier par de funciones $u\ v \in C^2([a\ b])$ las cuales satisfacen condiciones de contorno predeterminadas asociadas con L Esto quiere decir que $\langle u\ L(v)\rangle = \langle v\ L(u)\rangle$ donde

$$\langle u\ v\rangle = \int_a^b u(x)L(v(x))dx$$

Si un operador L en el espacio con producto interno $C^2([a\ b])$ es simetrico existen varias propiedades importantes asociadas con los autovalores y las autofunciones de tal operador

Aunque la definicion 2 2 1 se refiere a una propiedad del operador L posteriormente hallamos que esta propiedad es relativamente restringida a clases de condiciones de contorno predeterminadas sobre el operador L En estas condiciones es posible que un operador dado L sea simetrico con un conjunto de condiciones de contorno pero no con otro como se ilustra en el siguiente ejemplo

Ejemplo Determinar para cual conjunto de condiciones de contorno el operador autoadjunto $L=D^2$ es simetrico en [0 1]

$$(a)\quad y(0)=0 \quad y(1)=0$$

$$(b)\quad y(0)\ y(1)=0 \quad y\ (1)=0$$

Solucion Sustituyendo $L=D^2$ en la integral de la definicion 2 2 1 y usando integracion por partes hallamos que

$$\int_0^1 \left[u(x)v\ \ (x) - v(x)u\ \ (x)\right]dx = u(x)v\ (x) - v(x)u\ (x)\,\big|_0$$
$$= \left[u(1)v\ (1) - v(1)u\ (1)\right] - \left[u(0)v\ (0) - v(0)u\ (0)\right]$$

Por las condiciones de contorno en (a) se sigue que u y v satisfacen $u(0)=v(0)=0$ y $u(1)=v(1)=0$ Por lo tanto el lado derecho de la anterior integral es nulo y concluimos que $L=D^2$ es **simetrico** en este caso

En el caso de (b) las condiciones de contorno conducen a

$$u\ (0)\ u\ (1)=0 \quad v\ (0)\ v\ (1)=0 \text{ y } u\ (1)=v\ (1)=0$$

Basandose en estas relaciones la anterior integral se reduce a

$$\int_0^1 \left[u(x)v\ \ (x) - v(x)u\ \ (x)\right]dx = v(0)u\ (0) - u(0)v\ (0)$$

Puesto que el lado derecho de esta ultima expresión no necesariamente es cero deducimos que $L=D^2$ **no es simetrico** en este caso

2 3 DEFINICION DE ESPACIO DE HILBERT

DEFINICION 2 3 1 Sea H un espacio con producto interno

Se dice que H es un espacio de Hilbert, si cada sucesion de Cauchy converge a un elemento en H o sea si H es un espacio metrico completo

En general, un espacio con producto interno no es necesariamente un espacio de Hilbert podemos sin embargo ampliar este espacio agregandole todos los limites de las sucesiones de Cauchy

De esta manera podemos ver que X puede ser completado a un espacio de Hilbert H H se dice que la completacion de X [Gilbert, 1975 PG 21]

Ejemplo Consideremos el espacio de $C[0\ 1]$ de todas las funciones continuas f definidas en [0 1] con f que toma valores complejos Sobre $C[0\ 1]$ se define el producto interno $\langle f\ g\rangle = \int f(x)\bar{g}(x)dx$ aqui se puede verificar que no estamos tratando con un espacio de Hilbert

Consideramos la sucesion de funciones definidas por

$$f\ (x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ 1 - 2n\left(x - \dfrac{1}{2}\right) & \dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1+n}{2n} \\ 0 & \dfrac{1+n}{2n} \le x \le 1 \end{cases} \text{ donde n=1 2 3}$$

De manera que $\{f\}$ es una sucesiòn de funciones continuas Un calculo elemental demuestra que

$$\|f\ - f_m\| \le \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right]^{\frac{1}{2}}$$

El valor estimado en la desigualdad a la derecha, muestra que la sucesion es una sucesion de Cauchy Sin embargo

$$\lim_{\to\infty} f\ (x) = \{\ 1 \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$0 \text{ si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1\ \}$$

Vemos que $f\ (x)$ tiene un limite pero la funcion limite no esta en el espacio C[0 1] La funcion limite no es continua. La completacion de $C[a\ b]$ se designa por L^2 $[0\ 1]$ Este espacio consiste de todas las funciones f(x) para la cual podemos encontrar sucesiones de Cauchy en $C[0\ 1]$ talque

$$\lim_{\to} \int_0^1 |f(x) - f\ (x)|\ dx = 0$$

Para definir sus integrables sobre cualquier intervalo en $[0\ 1]$ es decir $[a\ \ b\ ]$ se supone

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\to\infty} \int_a^b f\ (x)dx$$

El limite de la derecha existe por el hecho de que

$$\left| \int_a^b f\ (x)dx - \int_a^b f\ \ (x)dx \right| \leq \int_a^b |f\ (x) - f\ \ (x)| dx$$

$$\leq \int_0^1 |f\ (x) - f\ \ (x)| dx$$

$$\leq \left[\int_0^1 |f\ (x) - f\ \ (x)|\ dx \right]^1$$

$$= \|f\ - f_m\|$$

Por la desigualdad de Cauchy Schwarz

Tenemos como resultado que la sucesión es de Cauchy en el plano complejo

El $\lim_{\to\infty} \int_a^b f\ (x)$ esta bien definido para todos los intervalos $[a\ \ b]$ en el dominio de definicion $[0\ 1]$ El proceso de completacion no asigna a cada sucesion de

Cauchy de funciones continuas una funcion unica Pero si asigna integrales unicos

El proceso de complementacion no nos dara funciones sino clases de equivalencias de funciones que difieren por una funcion nula

Un argumento similar puede ser utilizado para discutir el espacio $L_2(\infty\ \infty)$

Iniciaremos con el espacio $C_0[\infty\ \infty]$ que denota el conjunto de todas las funciones continuas de valores complejos que se anulan fuera de un intervalo finito Este intervalo dependera, de la funcion

El espacio se convierte en un espacio vectorial lineal con la adicion ordinaria de funciones y las multiplicaciones de escalares complejos

Ahora podemos introducir el siguiente producto interno

$$\langle f\ g\rangle = \int_{\infty}^{\infty} f(x)\bar{g}(x)dx$$

para obtener un espacio con producto interno

2 4 TEORIA ESPECTRAL DE OPERADORES

En los anos veinte con el desarrollo del analisis funcional y la teoria de los espacios de Hilbert, el problema singular tiene una alternativa. De interes particular son los trabajos de M Stone (Stone 1932) y J Von Neumann (Neumann 1929) los cuales derivan la resolucion espectral de un operador auto adjunto no acotado en el espacio de Hilbert

Asi como la idea principal de los operadores auto adjuntos acotados es presentar una mutua interrelacion via integrales espectrales entre operadores y funciones escalares En el problema de operadores no acotados el punto de partida es la medida espectral de cierto operador auto adjunto fijo para admitir ahora todas las funciones medibles no necesariamente acotadas

DEFINICION DE ESPECTRO 2 4 1 Un operador lineal $T\ E \to E$ se dice invertible si tiene un inverso esto es si existe $T \in L(E)$ talque $TT = T\ T = I$

Observaciones

1 T es invertible si y sólo si es biyectiva

2 Si E es un espacio de Hilbert, denotaremos $G(E)$ el conjunto de operadores $T \in L(E)$ que son invertibles y ademas $G(E)$ es el conjunto resolvente

Dado $T \in L(E)$ el conjunto de numeros complejos

$\sigma(T) = \{\lambda \in C$ talque $T\ \lambda I \notin G(E)\}$ se llama el espectro de T

3 El espectro puede ser vacio

Espacios de Dimension Infinita

Si el espacio vectorial es de dimension infinita, la nocion de autovalores puede generalizarse al concepto de espectro El espectro es el conjunto de escalares λ para el que $(T-\lambda)^{1}$ no esta definido asi $T-\lambda$ no tiene inversa acotada

Si λ es un auto valor de T λ esta en el espectro de T

En general el contra reciproco no es verdadero

Hay operadores en los espacios de Hilbert o Banach que no tienen vectores propios Por ejemplo tomese un desplazamiento bilateral en el espacio de Hilbert $l^2(\mathrm{Z})$ ningun vector propio potencial puede ser cuadrado sumable asi que no existe ninguno Sin embargo cualquier operador lineal acotado en un espacio de Banach V tiene espectro no vacio El espectro $\sigma(T)$ del operador $T\ V \to V$ se define como $\sigma(T) = \{\lambda \in C\ \ \lambda I - T\}$ no es invertible $\}$

Entonces $\sigma(T)$ es un conjunto compacto de numeros complejos y es no vacio Cuando T es un operador compacto (y en particular cuando T es un operador entre espacios finito dimensionales) el espectro de T es igual que el conjunto de sus valores propios

En espacios de dimension infinita, el espectro de un operador acotado es siempre no vacio lo que tambien se cumple para operadores auto adjuntos no acotados A través de su medida espectral el espectro de cualquier operador auto adjunto acotado o no puede descomponerse en sus partes absolutamente continua, discreta y singular Ahora detallaremos la teoria del espectro de un operador

Sea H un espacio de Hilbert (salvo que se indique lo contrario supondremos que H es complejo)

DEFINIÇION 2 4 2 Sea $T \in L(H)$ diremos que T es invertible si existe $S \in L(H)$ tal que $ST=TS=I$ Usaremos la siguiente notacion $S=T^{1}$

DEFINICION 2 4 3 Sea $T \in L(H)$ el conjunto resolvente de T es

$$\rho(T) = \{ \ \lambda \in C \quad T - \lambda I \text{ es invertible } \}$$

DEFINICIÓN 2 4 4 Sea $T \in L(H)$ el espectro de T es

$$\sigma(T) = \rho(T)^C = \{ \ \lambda \in C \quad T - \lambda I \text{ no es invertible } \}$$

PROPOSICIÓN 2 4 5 Si dim H es finita entonces $\sigma(T)$ es el conjunto de los autovalores de T

Observ..c on Al operador $(T - \lambda I)$ se le asocia una matriz cuadrada si se cambian las bases se obtiene otra matriz pero todas las matrices asociadas tienen el mismo determinante por esto podemos decir que $\sigma(T)$ está formado por las raices de $\det(T - \lambda I)$

Si la dimension de H es infinita puede ocurrir que $\lambda \in \sigma(T)$ y sin embargo λ no sea auto valor de T

Por ejemplo sea $T \ l^2(N) \to l^2(N)$ dado por

$$T(\{x \ \ x_1 \ x \quad \}) = \left\{x_0 \ \frac{1}{2} x \ \frac{1}{3} x \quad \right\}$$

Tenemos que T es inyectivo por lo tanto $N(T) = \{0\}$ así que 0 no es autovalor de T

Por otro lado $\|T(e \ )\| = 1/n$ luego $\lim \|T(e \ )\| = 0$ pero como $\|e \ \| = 1$

resulta que T no es invertible de donde $0 \in \sigma(T)$

PROPOSICIÓN 2 4 6 Sea $T \in L(H)$ tal que $\|T\| < 1$ entonces

a) $I - T$ es invertible

b) $\left\|(I-T)^{\ 1} - (I+T)\right\| \leq \dfrac{\|T\|}{1 - \|T\|}$

DEMOSTRACION De $\|T \ \| \leq \|T\|$ obtenemos

$$\left\|\sum T \ \right\| \leq \sum_{=0}^{\infty} \|T \ \| \leq \sum^{\infty} \|T\|$$

La serie de la derecha es una serie geometrica de razon $\|T\| < 1$ así que converge en

R y por lo tanto la serie $\sum \ _0 T$ converge $L(H)$ a un operador $S \in L(H)$

$$(I-T)S = S(I-T) = \sum_{=0} T \ - \sum_{=0}^{\infty} T^{\ 1} = I$$

De donde $I - T$ es invertible

$$(I-T)^{\ 1} - I - T = \sum^{\infty} T$$

Ademas

$$\left\|(I-T) \quad -(I+T)\right\| \leq \sum^{\infty} \|T\| \quad \leq \frac{\|T\|}{1-\|T\|}$$

TEOREMA 2 4 7 El conjunto de los operadores invertibles es abierto en *L(H)*

DEMOSTRACION Sea $T \in L(H)$ invertible Sea $S \in L(H)$ tal que

$\|S\| < 1/\|T^{-1}\|$

Entonces

$$\|T^{-1}S\| \leq \|T^{-1}\|\|S\| < 1$$

por proposicion anterior tenemos que $I + T^{-1}S$ es invertible Luego

$$T + S = T(I + T^{-1}S)$$

De donde $T + S$ es invertible

TEOREMA 2 4 8 Sea $T \in L(H)$ entonces $\rho(T)$ es abierto y

$$\{\lambda \in C \quad |\lambda| > \|T\|\} \subset \rho(T)$$

DEMOSTRACION Que $\rho(T)$ es abierto sigue del teorema anterior

Si $|\lambda| > \|T\|$ entonces $\|T/\lambda\| < 1$ Por proposicion anterior tenemos que

$I - \lambda^{-1} T$ es invertible De donde $\lambda I - T = \lambda\left(I - \lambda^{-1} T\right)$ es invertible

TEOREMA 2 4 9 Sea $T \in L(H)$ entonces $\sigma(T)$ es compacto y no vacio

DEMOSTRACION Que $\sigma(T)$ es compacto sigue del teorema anterior

Veamos que $\sigma(T)$ no es vacio

Sea $R \quad \rho(T) \to L(H)$ definida por

$$R(\lambda) = (\lambda I - T)$$

Si $\mu\ \lambda \in \rho(T)$ se tiene que

$$R(\mu)\quad (R(\mu)-R(\lambda))R(\lambda)^{\,1} = (\mu I - T)((\mu I - T)\quad -(\lambda I - T)^{\,1})(\lambda I - T) =$$

$$= (\lambda I - T) - (\mu I - T)$$

$$= (\lambda - \mu) I$$

Por lo tanto

$$R(\mu) - R(\lambda) = -(\mu - \lambda) R(\mu) R(\lambda)$$

supongamos que $\lambda \in \rho(T)$ entonces existe

$$\lim_{\to} \frac{R(\mu) - R(\lambda)}{\mu - \lambda}$$

$$\lim_{\mu \to \lambda} \frac{R(\mu) - R(\lambda)}{\mu - \lambda} = -(R(\lambda))$$

Por lo tanto R es una funcion analitica en $\rho(T)$ (Notar que esto implica que $F(\lambda) = f(R(\lambda))$ es analitica en $\rho(T)$ para todo $f \in L(H)$)

Si $|\lambda| > \|T\|$ entonces

$$R(\lambda) = (\lambda I - T)\quad = \lambda\quad (I - \lambda\quad T)\quad = \lambda\quad \sum_{0}^{\infty} (T/\lambda)$$

$$\|R(\lambda)\| \le \frac{1}{|\lambda|} \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{\|T\|}{|\lambda|} \right) = \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \|T\|/|\lambda|} = \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}$$

de donde

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} R(\lambda) = 0$$

y

$$\|R(\lambda)\| \leq \|T\|^{1} \qquad \text{si} \qquad |\lambda| \geq 2\|T\|$$

Si $\sigma(T)$ fuese vacio entonces $R(\lambda)$ seria una funcion entera

Claramente

$$\|R(\lambda)\| \leq M < \infty$$

Para todo λ tal que $|\lambda| \leq 2\|T\|$

Por el teorema de Liouville debe ser $R(\lambda) = 0$ (Este teorema dice que una funcion que es analitica y acotada en todo el plano es una funcion constante)

De donde $\sigma(T) \neq \phi$

DEFINICION 2 4 11 Si $T \in L(H)$ se define el radio espectral de T por

$$r(T) = \max_{\lambda \quad (T)} |\lambda|$$

TEOREMA 2 4 11 (Formula de Gelfand) Si $T \in L(H)$ entonces

$$r(T) = \lim_{\to\infty} \|T \quad\|^{1/} = \inf_{1} \|T \quad\|^{1/}$$

DEMOSTRACIÓN La haremos en varias partes

1) Probaremos que

$$\lim_{\to} \|T \quad\|^{1/} = \inf_{1} \|T \quad\|^{/}$$

Sea $m \geq 1$ (entero fijo) Si $n \in N$ entonces

$$n = mq \; + r$$

Donde $0 \leq r < m$ Luego

$$\|T\|^{1/} = \|T^{mq}\|^{1/} \leq \|T\|^{q/}\|T\|^{/}$$

$$\lim_{\to\infty} r/n = 0 \qquad \lim_{\to\infty} q/n = 1/n$$

Luego para todo $m \geq 1$

$$\lim_{\to\infty} \sup \|T\|^{1/} \quad \|T^{m}\|^{1/}$$

de donde

$$\lim_{\to\infty} \sup \|T\|^{1/} \leq \inf_{m\geq 1} \|T\|^{1/m} \leq \lim_{\to\infty} \inf \|T\|^{1/}$$

Por lo tanto $\lim \|T^{n}\|^{1/}$ existe y

$$\lim_{\to\infty} \|T\|^{1/} = \inf_{\geq 1} \|T\|^{1/}$$

2) Veremos que

$$(T) \leq \lim_{\to\infty} \|T\|^{1/}$$

Sea $\lambda \in C$ tal que

$$|\lambda| > \lim_{n\to\infty} \|T\|^{1/}$$

entonces

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{\|T\|}{|\lambda|} < \infty$$

porque

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\|T\|}{|\lambda|}\right)^{1/} \quad 1$$

y por lo tanto

$$\sum = \sum_{-0} T \;/\lambda \; < \infty$$

Como

$$(\lambda I - T)\sum = \sum(\lambda I - T) = I$$

se sigue que $\lambda I - T$ es invertible

de donde

$$\left\{\lambda \in C \quad |\lambda| > \lim_{\to\infty}\|T\quad\|^{1/}\right\} \subset \rho(T)$$

Luego

$$(T) \leq \lim_{\to\infty}\|T\quad\|^{1/n}$$

3) Finalmente demostraremos que

$$(T) \geq \lim_{\to\infty}\|T\quad\|^{1/n}$$

Definamos la funcion

$$R(\lambda) = (\lambda I - T)^{\ 1}$$

Esta funcion es analitica en $\rho(T)$ Luego R es analitica en $\{\lambda \in \square \quad |\lambda| > r(T)\}$

Sea $f \in L(H)^*$ definamos

$$F(\lambda) = f(R(\lambda))$$

entonces F es analitica en $\{\lambda \quad |\lambda| > r(T)\}$

Ademas si $|\lambda| > r(T)$ entonces

$$F(\lambda) = \sum_{-0}^{\infty} \frac{1}{\lambda} f(T \quad)$$

(porque el desarrollo es valido en cualquier conjunto de la forma $\{\lambda \ |\lambda| > a\}$ contenido en el dominio de F)

Sea $\lambda \in \rho(T)$ tal que $|\lambda| > r(T)$ entonces $\{f(T \ / \lambda \ \}_{=0}$ es acotado para todo $f \in L(H \ )$ De donde

$$\|T \ / \lambda \ \| \leq M \quad \text{para todo } n \in N$$

Luego

$$\|T \ \|^{\prime} \leq M^{1\prime} \ |\lambda \ |$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \leq |\lambda \ |$$

De donde

$$\lim_{n\to\infty} \|T \ \|^{1/} \leq \ (T)$$

TEOREMA 2 4 12 (Aplicacion espectral para polinomios)

Sea $T \in L(H)$ y P un polinomio entonces

$$\sigma(P(T)) = P(\sigma(T))$$

DEMOSTRACION **(1)** Veamos que

$$\sigma(P(T)) \subset P(\sigma(T))$$

Sea $\lambda \in \sigma(P(T))$ entonces $\lambda I - P(T)$ no es invertible

Si

$$\lambda - P(t) = a(t - t\ )(t - t\ )\ \ (t - t\ )$$

entonces

$$\lambda I - P(T) = a\left(T - t_1\right)(T - t\ I)\ \ (T - t\ I)$$

Como $\lambda I - P(T)$ no es invertible entonces existe algun k tal que $T - t\ I$ no es invertible y por lo tanto $t_k \in \sigma(T)$

Como

$$P(t_k) = \lambda$$

entonces se concluye que $\lambda \in P(\sigma\left(T\right))$

i Finalmente probaremos que

$$P\big(\sigma\left(T\right)\big) \subset \sigma(P(T))$$

Sea $\lambda \in P\big(\sigma\left(T\right)\big)$ entonces

$$\lambda - P(t) = a(t - t_1)(t - t\ )\ \ (t - t\ )$$

donde $t_1 \in \sigma(T)$ Ademas

$$\lambda I - P(T) = a(T - t\ I)(T - t\ I)\ \ (T - t\ I)$$

Como $t_1 \in \sigma(T)$ entonces $T - t\ I$ no es invertible

Por lo tanto $\lambda I - P(T)$ no es invertible De donde $\lambda \in \sigma\big(P\left(T\right)\big)$

2 5 TEORIA ESPECTRAL DE LOS OPERADORES NORMALES EN ESPACIOS DE HILBERT COMPLEJOS DE DIMENSION FINITA

DEFINICION 2 5 1 Polinomio Caracteristico de un Operador

Sea E un espacio Prehibertiano de dimension finita $T \; E \to E$ lineal El polinomio caracteristico del operador $p(x)$ es

$$p(\lambda) = det\,(T - \lambda I)$$

(Ver observacion 2 4 5)

DEFINICION 2.5 2 El Espectro de un Operador T en C^n

Si el operador se define por una matriz ($a \;_{j}$)$\in U \; (C)$ en una base B el espectro consiste de las raices del polinomio caracteristico de la matriz a $_{j}$

$$P(\lambda) = det\,((a \;_{j}) - \lambda I) = (\;\; 1) \; (\lambda \quad + e_{1}\lambda \;\; ^{1} + \qquad + e \;\;)$$

El espectro de un operador en C^n definido por una matriz se llama el espectro de la matriz

Observaciones El espectro $\sigma(T)$ para un operador T en un espacio de Hilbert real de dimension finita puede ser vacio ya que el polinomio característico de un operador $T \in L\,(E)$ puede no tener raices reales

PROPOSICION 2 5 2 Sea E un espacio vectorial complejo de dimension finita n Toda transformacion lineal A de E tiene por lo menos un autovalor

DEMOSTRACIÓN Consideremos una base { e_1 $\qquad$ e } de E y la matriz (a $_{j}$) de A en relacion a esa base entonces toda raiz λ del polinomio $p\,(\lambda) = det\left|\, a_{j} \quad \lambda\,\delta_{j} \,\right|$ es un autovalor de A y una solucion $x = (x \qquad x \;\;)$ no trivial del sistema de ecuaciones

$$\sum_{1} a_{j} \; x \;\; = \lambda\, x_{j} \quad , \; j \;\; 1 \; 2$$

es un autovector de A

Dado un espacio vectorial E sobre un cuerpo K y una transformacion lineal A de E para todo $\lambda \in K$ sea $N(A\ ) = (A-\lambda)\ (0) = \{x \in E\ \ Ax = \lambda x\}$ esto es el subespacio de E formado por los autovectores correspondientes al autovalor de λ

PROPOSICION 2 5 3 Dada dos transformaciones lineales A y B de E tales que $AB = BA$ para todo $\lambda \in K$ $N(A_\lambda)$ es un subespacio invariante por B

DEMOSTRACION Dado $X \in N(A_\lambda)$ tenemos que

$$AB\ X = BA\ X = B(\lambda\ X) = \lambda\ B\ X$$

Por consiguiente

$$B\,X \in N(A_\lambda)$$

Asi $N(A_\lambda)$ es un subespacio invariante por B

PROPOSICION 2.5 4 Sea E un espacio vectorial complejo de dimension finita y A B transformaciones lineales de E tales que $AB = BA$ entonces A y B tienen un autovector comun

DEMOSTRACION Por la proposición 2 4 1 existe un autovalor λ_0 de A y por la proposicion 2 4 2 $A\ \lambda_0$ es un subespacio vectorial de E que es invariante por B Por la proposicion 2 4 1 la restriccion de B a $A\ \lambda_0$ tiene autovalor y un autovector correspondiente es entonces un autovector comun a A y a B

TEOREMA 2 5 5 Teorema Espectral Para Operadores Normales

Sea E un espacio de Hilbert complejo de dimension finita n y sea $A \in L\ (\ E\ )$ existe una base ortonormal $\{\ e_1\ \ \ e\ \}$ de E en relacion a la cual la matriz de A es diagonal esto es $A\ e\ = \lambda\ e\ \ \ \ _j$

$< A\ e\ \ \ e_j > = \lambda\ \ \delta_j$

$Ax = \sum_i \lambda\, x\, e$ donde $x\ = < x\ \ e\ >$ si y solamente si, A es normal

(todo espacio con producto interno de dimension finita es de Hilbert)

DEMOSTRACION (condicion necesaria) Si existe una base ortonormal

$\{e_1 \quad e_n\}$ de E tal que $A e = \lambda e$ entonces $A e = \bar{\lambda} e$ en efecto para todo

j=1 n tenemos que

$$< A e - \bar{\lambda} e \; e >=< e \;\; Ae_j - \lambda e_j >$$

$$= < e \;\; (\lambda_j - \lambda)e_j >$$

$$= 0$$

por tanto

$$AA e = |\lambda|^2 e = A\,Ae \qquad \text{in}= 1$$

de donde

Por consiguiente A es normal

(Condicion Suficiente) Vamos a demostrar la reciproca por induccion sobre la dimension n de E el resultado es trivial para n=1 si $AA = A A$ luego de la proposicion 2 4 3 se sigue que A y A tienen un autovector comun e_1 y $Ae_1 = \lambda_1 e_1$ Siendo $\{e\}^{\perp}$ un subespacio vectorial de E de dimension n 1 que es invariante por A y A de la hipotesis de induccion aplicada a la restriccion de A a $\{e\}^{\perp}$ se sigue que existe una base ortonormal

$\{e_2 \quad e\}$ de $\{e\}^{\perp}$ talque $A e = \lambda e$ $i=1$ n,

Lo que completa la demostracion

TEOREMA2 5 6 Teorema Espectral Para Operadores Hermitianos

Sea E un espacio de Hilbert complejo de dimension finita n y sea

$A \in L(E)$ A es hermitiano si y solamente si existe una base ortonormal de E en relacion a la cual la matriz de A es diagonal real

Observacion El teorema precedente es valido para espacios de Hilbert reales (de dimension finita)

TEOREMA 2 5 7 Sea E un espacio de Hilbert complejo de dimension finita n y sea f una forma sesquilineal hermitiana definida sobre E existe una base ortonormal $\{e_1 \quad e\}$ de E y existen numeros reales $\lambda_1 \quad \lambda$ tales que tenemos que

$$f(x\ y)=\sum_{i}\lambda\, x\,\overline{y}$$

DEFINICION 2 5 8 Un operador hermitiano A (una forma hermitiana f) es positivo si tenemos que $<A\ x \quad x> \geq 0$ $[f(x \quad x) \geq 0]$ para todo $x \in E$

Observaciones

a) Sobre un espacio de Hilbert de dimension finita, una forma hermitiana es positiva si y solamente si todos los λ son positivos

b) Toda forma hermitiana sobre un espacio de Hilbert de dimension finita puede ser expresada como diferencia de dos formas hermitianas positivas

c) Un operador hermitiano sobre un espacio de Hilbert de dimension finita es positivo si y solamente si todos sus autovalores son positivos

d) Todo operador hermitiano positivo A sobre un espacio de Hilbert de dimension finita tiene una raiz cuadrada B esto es que es un operador hermitiano positivo

2 6 Teoria Espectral de los Operadores Hermitianos Compactos

Sea E un espacio prehibertiano Si A es un operador hermitiano de E recordemos que todos los autovalores de A son reales y que autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales Ademas si E_0 es un subespacio de E invariante por A entonces E_0 tambien es invariante por A

PROPOSICION 2 6 1 Sea E un espacio prehilbertiano y

$A \in L(E)$ un operador hermitiano si λ es un autovalor de A entonces

$1 \,|\lambda| \leq \|A\|$

DEMOSTRACION Si λ es un autovalor de A para algun $x \in E$ entonces

$$|\lambda| \, \|x\| = \|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$$

Por tanto

$$Ax = \lambda x \quad \text{implica que} \quad \|Ax\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \text{pero}$$

$$\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$$

$$|\lambda| \leq \|A\|$$

Ahora trataremos de derivar sin asumir la propiedad simetrica del nucleo los resultados correspondientes a teoremas que son conocidos como las opciones del teorema de Fredholm Asi iniciaremos con

TEOREMA 2 6 2 Sea A un operador hermitiano compacto $A \neq 0$ entonces $\|A\|$ o $-\|A\|$ es un auto valor de A

DEMOSTRACION vamos a demostrar que existe $y \neq 0$ con $Ay = \lambda y$ donde $|\lambda| = \|A\|$

Existe una sucesion $(e\ ) \in E$ con $\|e\ \| = 1$ tal que $|< Ae\ \ e\ >| \to \|A\|$

Siendo la sucesion $< Ae\ \ e\ >$ formada por numeros reales podemos encontrar una sub sucesion que indicamos con la misma notacion tal que $< Ae\ \ e\ > \to \lambda$ donde

$$\lambda = \|A\| \text{ o } \lambda = -\|A\|$$

y por tanto $\quad |\lambda| = \|A\|$

Tenemos ahora que

$$0 \leq \|Ae\ - \lambda e\ \|^2 = < Ae\ - \lambda e\ \ \ Ae\ - \lambda e\ >$$

$$= \|Ae\| \ - < Ae \quad \lambda e > - < \lambda e \quad Ae > + |\lambda|^2$$

$$\leq \|A\| \ - 2\lambda < Ae \quad e > + \|A\|^2 \to 0$$

Pues

$$< Ae \quad e > \to \lambda$$

Por tanto

$\|Ae \ - \lambda e \| \to 0$ siendo A un operador compacto

existe un subsucesion $(e \ )$ de la sucesion limitada $(e \ )$ tal que Ae converge para un elemento $y \in E$

Tenemos que

$$\lambda e \ = Ae \ - \left(Ae \ - \lambda e \ \right) \to y$$

Y por tanto

$$A(\lambda e \ ) \to Ay$$

pero

$$A(\lambda e \ ) = \lambda A(e \ ) \to \lambda y$$

Por tanto

$$Ay = \lambda y \ \text{ de } \lambda e \ \to y$$

se sigue que

$$\|y\| = \|\lambda e \ \| = |\lambda| \neq 0$$

Con lo cual

$\|A\|$ o $-\|A\|$ es un auto valor de A

TEOREMA 2 6 3 (Teorema espectral de los operadores hermitianos compactos) Sea E un espacio pre hilbertiano (real o complejo) y A un operador hermitiano compacto definido en E $A \neq 0$ Existe una sucesion $(\lambda\ )_{n\in\mathbb{D}} \in R$ (finita o infinita) de autovalores no nulos de A y una sucesion $(e\ )\ _N$ de autovectores correspondientes que forman un conjunto ortonormal tal que para todo elemento $x \in E$ tenemos que

$$Ax = \sum \lambda\ x\ e \qquad (1)$$

donde $x\ =< x\ e\ >$

Tenemos que $|\lambda\,| \geq |\lambda\ \ |$ la sucesion contiene todos los autovalores no nulos de A y si ella es infinita tendremos que $|\lambda\ | \to 0$

Dado en particular $\lambda = \lambda$ la dimension del subespacio A generado por lo auto vectores correspondientes al auto valor λ es finita e igual al numero de veces que el auto valor λ aparece en la sucesion $(\lambda\ )_{n\in N}$

DEMOSTRACION indiquemos por λ_1 y e_1 un auto valor y el auto vector unitario correspondiente de A

Hagamos $E_1 = E$ y $A_1 = A$ tenemos que $|\lambda_1| = \|A_1\|$ y $E_2 = \{e_1\}$ es un subespacio de E invariante por A_1

La restriccion A_2 de A_1 a E_2 es un operador hermitiano compacto y nuevamente por el teorema 2 6 2 existe un auto valor λ_2 y un auto vector unitario correspondiente e_2 de A_2 (y por consiguiente tambien de A)

Tal que $$|\lambda_2| = \|A_2\| \leq \|A_1\|$$

Por tanto

$$|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$$

Repitiendo ese proceso obtenemos sucesivamente

autovalores no nulos λ_1 λ de A con $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \quad \geq |\lambda\ |$

Auto vectores correspondientes e e formando un sistema ortonormal

sub espacios E_2 E_3 $E\ _1$ donde E indica el subespacio de E (o de E) formado por los vectores ortogonales a e e

A) Si la restriccion A_n de A a E es nula, tendremos para todo $x \in E$

$$Ax = \sum \lambda\, x\, e$$

Donde $x_1 = < x\ e >$ esto es $A(E)$ es el subespacio de E generado por los vectores e e

En efecto sea $\bar{x} = x - \sum_1 x\, e$ entonces $< x\ e > = 0$ para $i = 1$ n y por consiguiente $x \in E\ _1$ de donde se sigue que $A\bar{x} = 0$

y por consiguiente

$$Ax = \sum_1 x\, Ae = \sum_1 \lambda\, x\, e$$

B) Si para todo natural n la restriccion $A_{n\ 1}$ de A a $E\ _1$ sea siempre no nula, entonces el proceso anterior nos dara una sucesion infinita $(\lambda\ )\ _N$ de autovalores no nulos de A con

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \quad \geq |\lambda\ | \geq$$

y un sistema ortonormal $(e\ )\ _N$ formado por los auto vectores correspondientes (a)La sucesion decreciente $|\lambda|$ tiende a cero sino existiria un $\varepsilon > 0$ tal que $|\lambda| \geq \varepsilon$ para todo $n \in N$ y la sucesion $\left(\frac{e}{\lambda}\right)_{n\in N}$ seria entonces acotada por $\left[\left\|\frac{e}{\lambda}\right\| \leq \frac{1}{\varepsilon}\right)$ sin que la sucesion $A\left(\frac{e}{\lambda}\right) = e$ contenga una subsucesion convergente pues ella es formada por vectores ortonormales $(d(e \quad e\ ) = \sqrt{2})$

Por tanto llegamos a una contradiccion con la hipotesis de que el operador A es compacto

b) Para todo $x \in E$ tenemos que $Ax = \sum_{1}^{\infty} \lambda\ x\ e$ esto es para todo $x \in E$ la serie

$\sum_{1}^{\infty} \lambda\ x\ e$ es convergente para Ax basta demostrar que dado $x \in E$ y $\varepsilon > 0$ existe un entero m_0 talque para $m \geq m_0$ tenemos que

$\left\| Ax - \sum_{1}^{m} \lambda\ x\ e \right\| < \varepsilon$ se sigue que

$$\left\| Ax - \sum^{m} \lambda\ x\ e \right\| = \left\| A(x - \sum x\ e\ ) \right\|$$

$$\leq \|A \quad {}_1\| \left\| x - \sum_{1} x \quad e \right\| \leq \|\lambda \quad {}_1\| \|x\| \leq \varepsilon \ \|x\|$$

puesto que $(\lambda\ )_{m\ N}$ converge a cero

c) Todo auto valor $\lambda \neq 0$ de A se encuentra en la sucesion $(\lambda\ )_N$ pues si no el auto vector correspondiente seria ortogonal a todos los e y de b) se sigue que $Ae = 0$ lo que contradice la hipotesis de que $Ae = \lambda e \neq 0$

d) Dado un auto valor $\lambda \neq 0$ que aparece p veces en la sucesion $(\lambda\ )$ entonces el sub espacio generado por los auto vectores correspondientes al auto valor λ tienen dimension $\geq p$ pues existen por lo menos p auto vectores ortonormales correspondientes a λ El sub espacio no puede tener dimension > p pues si no existiria todavia un auto vector correspondiente a λ ortogonal a los anteriores y todos los e como en c) se tiene entonces que $Ae = 0$

COROLARIO 2 6 4 Para cualquier $x\ y \in E$ tenemos que

$$\langle Ax\ y\rangle = \sum_{\iota}^{\infty} \lambda\ x\ \overline{y}$$

DEMOSTRACION Por (1) tenemos que

$$\langle Ax\ y\rangle = \sum_{\iota} \lambda\ x\ \langle e\quad y\rangle$$

$$= \sum \lambda\ x\ \overline{\langle y\ e\ \rangle}$$

$$= \sum_{\iota} \lambda\ x\ \overline{y}$$

TEOREMA 2 6 5 Sea E un espacio pre hilbertiano y A un operador hermitiano compacto definido en E $A \neq 0$ Dado $\lambda \in K$ $\lambda \neq 0$ talque $\lambda \neq \lambda$ para todo n entonces el operador $\lambda - A$ tiene un inverso continuo definido en E dicho inverso aditivo se indica por $(\lambda - A)^{\ 1}$ entonces $x = (\lambda - A)^{\ 1}$ es dado por

$$x = \frac{1}{\lambda} y + \frac{1}{\lambda} \sum \lambda \; \frac{y}{\lambda - \lambda} e \tag{2}$$

donde

$$y = \langle y \; e \rangle$$

Observacion Cuando los e forman una base ortonormal de E entonces

$$x = \sum \frac{y}{\lambda - \lambda} e$$

DEMOSTRACION 1) Si la ecuacion $\lambda x - Ax = y$ tiene una solucion x ésta ciertamente es unica y dada por la serie anterior pues de (1) se tiene que

$$\lambda x - y = Ax = \sum \lambda \; x \; e$$

y efectuando el producto interno por e se tiene que

$$\lambda x \; - y \; = \lambda \; x \quad \text{esto es} \quad x \; = \frac{y_m}{\lambda - \lambda}$$

por tanto

$$\lambda x - y = \sum \lambda \left[\frac{y}{\lambda - \lambda} \right] e$$

que equivale a (2)

2) Si la serie de (2) es convergente el elemento x definido por ella satisface la ecuacion $(\lambda - A) x = y$

3) La serie de (2) satisface la condición de Cauchy

Sea

$$\alpha = \sup_n \left| \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \right| \quad \text{y} \quad \beta = \sup_n \left| \frac{1}{\lambda - \lambda} \right|$$

que con numeros finitos pues $\lambda \neq 0$ $\lambda \neq \lambda$

y $|\lambda| \to 0$ (si la sucesion λ es finita, el teorema es evidentemente trivial)

Sea

$$v = \sum_{n-1} \frac{y}{\lambda - \lambda} e \qquad y \qquad u = Av = \sum_{1}^{m} \lambda \frac{y}{\lambda - \lambda} e$$

Tenemos que

$$\|u_{p} - u\| = \sum_{n=m} \left| \frac{\lambda}{\lambda - \lambda} \right|^2 |y|^2 \leq \alpha^2 \sum_{-n\ 1}^{p} |y|$$

La serie

$$\sum^{\infty} |y|^2$$

Siendo convergente satisface la condicion de Cauchy y la ultima relacion muestra que el mismo es verdad para la serie (2) Por eso no siendo el espacio de E supuesto completo no podemos concluir que la serie de (2) es convergente

4) La serie (2) que define que x es convergente por

$$\|v\|^2 = \sum_{1} \left| \frac{y}{\lambda - \lambda} \right| \leq \beta^2 \sum_{1}^{m} |y| \leq \beta^2 \|y\|$$

vemos que la sucesion v es acotada en E y A siendo un operador compacto existe entonces una subsucesion v tal que la sucesion $u = Av$ sea convergente

Por eso si la sucesion de Cauchy u contiene una subsucesion convergente entonces ella misma ya es convergente lo que completa la demostración de la convergencia de la serie (2)

5) De (2) se sigue que

$$\|x\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \|y\| + \frac{1}{|\lambda|}$$

Lo que prueba que el operador $(\lambda - A)^{1}$ es continuo y que

$$\left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \leq \left[\frac{1}{\lambda} + \frac{\infty}{|\lambda|}\right]$$
$$= \frac{1}{|\lambda|}\left[1 + s\ p\left[\frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}\right]\right]$$

TEOREMA 2 6 6 Dado un operador hermıtiano compacto A en un espacıo de pre hılbertıano E y dado un auto valor $\lambda \neq 0$ de A una condıcıon necesarıa y sufıcıente para que la ecuacıon

$$\lambda x - Ax = y$$

Tenga una solucıon es que y sea ortogonal a todo auto vector de A asocıado a λ

Las solucıones x de la ecuacıon son entonces los elementos de la forma

$$x = \frac{1}{\lambda} y + \frac{1}{\lambda} \sum_{\lambda_n} \lambda \ \frac{y}{\lambda - \lambda} e \ + z \tag{3}$$

donde z es cualquıer auto vector asocıado a λ esto es $Az = \lambda z$

DEMOSTRACION (Condıcıon necesarıa) Sea $\lambda x - Ax = y$

entonces

$$\begin{aligned}\langle x\ \lambda z - Az\rangle &= \langle x\ \lambda z\rangle - \langle x\ Az\rangle \\ &= \langle \lambda x\ z\rangle - \langle Ax\ z\rangle \\ &= \langle \lambda x - Ax\ z\rangle \\ &= \langle y\ z\rangle\end{aligned}$$

Por tanto para todo z tal que $Az = \lambda z$ tenemos que

$$\langle y\ z\rangle = 0$$

por el teorema 2 6 5 se obtıene que $x = (\lambda - A)^{-1}(y)$

es de la forma (3) basta recordar que

$y = \langle y\ e\ \rangle$ sı $\lambda = \lambda$ pues entonces, $Ae = \lambda e$

(Condicion suficiente) Si $\langle y\ z\rangle = 0$ para todo z, tal que $Az = \lambda z$ luego todo elemento x de la forma (3) es una solucion de $\lambda x - Ax = y$

Quizas la mas importante de las propiedades de los operadores autoadjuntos y simetricos es la **ortogonalidad** de las funciones propias (o autofunciones)

Ahora es momento de precisar la nocion de autofuncion y autovalor del operador diferencial L asociado al problema de Sturm Liouville

DEFINICION 2 6 0 Una solución no trivial de un sistema de Sturm Liouville es llamada **autofuncion** y el correspondiente λ es llamado **autovalor** Tambien se dice que cada autofuncion pertenece a su autovalor El conjunto de todos los autovalores de un sistema de Sturm Liouville se le llama **Espectro** del sistema.

DEFINICION 2 6 1 Si f y g son funciones integrables en un intervalo entonces decimos que ellas son **ortogonales** en este intervalo si y solo si

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx = 0 \qquad \textbf{(2 6 0)}$$

Decimos que f y g son ortogonales con respecto a una funcion de peso w(x)>0 si y solo si

$$\int_{\alpha}^{\beta} w(x)f(x)g(x)dx = 0 \qquad \textbf{(2 6 1)}$$

También se dice en el caso (2 6 1) que f y g son $w(x)$-ortogonales El intervalo de la definicion 2 6 0 puede ser en algunos casos cerrado o infinitamente extendido en ambos extremos

El teorema que sigue afirma la ortogonalidad de un conjunto de autofunciones $\{\phi\ (x)\}$ de un sistema de Sturm Liouville

TEOREMA 2 6 7 Sea L un operador simetrico en el intervalo $[\alpha\ \beta]$ asociado con la ecuacion propia

$$L[y]+\lambda w(x)y=0 \qquad \alpha<x<\beta$$

Si λ_n y λ_k son dos autovalores distintos, de L con correspondientes autofunciones $\phi\ (x)$ y $\phi_k(x)$ respectivamente entonces $\phi\ (x)$ y $\phi_k(x)$ w(x) ortogonales es decir

$$\int_\alpha^\beta w(x)\phi\ (x)\phi\ (x)dx=0 \qquad n\neq k$$

DEMOSTRACION Las funciones propias $\{\phi\ (x)\}$ y $\{\phi_k(x)\}$ satisfacen las relaciones

$$L[\phi\ (x)]=-\lambda\ w(x)\phi\ (x)$$
$$L[\phi_k(x)]=-\lambda_k w(x)\phi_k(x)$$

Si multiplicamos la primera de estas ecuaciones diferenciales por $\{\phi\ (x)\}$ y la segunda por $\{\phi\ (x)\}$ restando las ecuaciones resultantes e integrando sobre el intervalo de interes obtenemos

$$\int_\alpha^\beta\{\phi_k(x)L[\phi\ (x)]-\phi\ (x)L[\phi_k(x)]\}dx=(\lambda_k-\lambda\ )\int_\alpha^\beta w(x)\phi\ (x)\phi_k(x)dx$$

A causa de que L es simetrica, se sigue de la definicion (1 7 2) que la integral en el lado izquierdo es cero y por tanto

$$(\lambda_k-\lambda\ )\int_\alpha^\beta w(x)\phi\ (x)\phi_k(x)dx=0$$

Por hipotesis $\lambda\ \neq\lambda_k$ asi decimos que la integral es nula y el teorema queda demostrado

Observacion Si L es simetrico sus autovalores son reales

TEOREMA 2 6 8 Los autovalores de un operador simétrico son todos reales

Demostracion Supongase que existe algun autovalor complejo λ con respecto a una autofuncion $\phi_k(x)$ es decir

$$\overline{L[\phi(x)] + \lambda_k r(x)\phi_k(x)} = \overline{L[\phi(x)]} + \overline{\lambda_k} r(x)\overline{\phi\ (x)} = 0$$

Se sigue ahora que $\phi\ (x)$ y $\overline{\phi_k(x)}$ corresponden a autovalores diferentes λ y $\overline{\lambda_k}$ respectivamente y por lo tanto son necesariamente ortogonales debido a la simetria del operador L

Esto indica que

$$\int^{\beta} r(x)\phi_k(x)\overline{\phi_k(x)} = \int^{\beta} r(x)\left|\phi_k(x)\right|^2 dx = 0$$

pero puesto que el integrando es positivo esta integral jamas es cero con lo cual obtenemos una contradiccion Nuestra afirmacion de que existe un autovalor complejo es falsa y el teorema es demostrado

Aunque el teorema 2 6 8 afirma que todos los autovalores de un operador simetrico son reales no garantiza la existencia de algun autovalor El siguiente teorema se demuestra con la ayuda del teorema espectral y aqui no lo damos

TEOREMA 2 6 9 Los autovalores de un operador simétrico forman una sucesion infinita ordenados en magnitud tal que

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \quad < \lambda \ <$$

donde $\lambda \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y tal que las autofunciones correspondientes forman un sistema ortogonal completo [Gilbert 1975 PG 197]

TEOREMA 2 6 10 Los autovalores de un sistema de Sturm Liouville regular son simples es decir que el espacio vectorial de las autofunciones asociadas al autovalor tienen dimension 1

DEMOSTRACION Supongamos que $\phi\ (x)$ y $\phi\ (x)$ son funciones propias correspondientes al mismo autovalor λ En $x = \alpha$ cada autofuncion debe satisfacer las condiciones de contorno predeterminadas asi que

$$a\ \phi\ (\alpha)+a\ \phi\ (\alpha)=0$$
$$a\ \phi\ (\alpha)+a_1\ \phi\ (\alpha)=0$$

Puesto que a y a no pueden ser cero sımultaneamente en los extremos del ıntervalo solucıon se exıge el deternınante de los coeficıentes debe ser nulo y ası (como arrıba)

$$W(\phi\ \ \phi_k)(\alpha)=0$$

Sı el Wronskıano de dos solucıones de una ecuacıon dıferencıal es nulo en un punto del ıntervalo solucıon por el prıncıpıo de prolongamıento de ıdentıdades para funcıones contınuas se sıgue que el debe ser cero en todo el ıntervalo Por lo tanto $\phi\ (x)$ y $\phi_k(x)$ son proporcıonales (lınealmente dependıentes) y por tanto el espacıo asocıado al autovalor λ es de dımensıon 1

2 7 APLICACION DEL TEOREMA DE LA ALTERNATIVA AL ESTUDIO DEL PROBLEMA DE STURM LIOUVILLE

Supongamos que L(y) =0 tıene solamente la solucıon trıvıal y que L esta dotada de ınversa en este caso el problema $L(y)—\lambda(y)=F$ $(F \in C(I)$ se puede traducır en una ecuacıon ıntegral medıante la funcıon de GREEN G relatıva a L

Sea $y=\lambda L\ \ (y)+L\ \ (F)$ o sea $y(x)=F(x)+\lambda\int_a^b G(x\ \varepsilon)y(\varepsilon)d\varepsilon \quad x\in I$ (2 7 1)

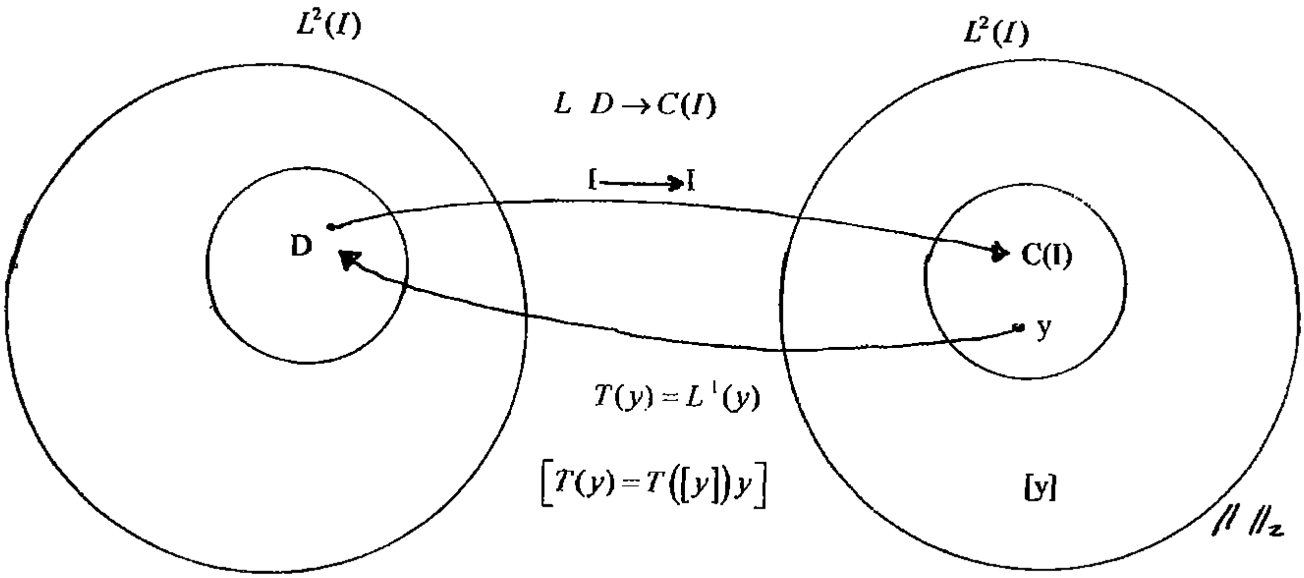
$$F(x)=\int_a^b G(x\ \varepsilon)y(\varepsilon)d\varepsilon \qquad (2\ 7\ 2)$$

El operador T T $L^2(I)\to L^2(I)$ definıdo ponıendo $T([y])=[T(y)]$ para toda $y\in L^2(I)$ donde $T(y)_{(\ )}=\int_I G(x\ \varepsilon)y(\varepsilon)d\varepsilon$ es un operador compacto

El adjunto de T es el operador T tal que $T\ ([y])=[T\ \ (y)]$

y $T\ ([y])_{(\ )}=\int_I G(x\ \varepsilon)y(\varepsilon)d\varepsilon \quad x\in I$

Como $\left[L^{1}(y)\right]=\left[T(y)\right]$ para $y\in C(I)$ $L^{1}\ C(I)\rightarrow D$ y $C(I)$ es denso en $L(I)$ entonces T es el prolongamiento continuo de L^{1} en todo $L^2(I)$



Siendo μ un auto valor no nulo e y una correspondiente auto función de T $T=\overline{L^{1}}$ resulta

$$(T-\mu)(y)=0 \qquad (2\ 7\ 3)$$

como $\left|T(y)(x_1)-T(y)(x_2)\right|\leq\left(\int_I\left|G(x_1\ \varepsilon)-G(x\ \ \varepsilon)\right|^2 d\varepsilon\right)\|y\|$ siendo G continua en I x I resulta $y=\dfrac{1}{\mu}T(y)$ es continua y consecuentemente de clase $C^{(\ )}$ y cuando $y\in D$ y $L(y)=\lambda y$ entonces $T(L(y))=\lambda T(y)$ pero $T\left(L(y)\right)=L(T(y))=y$ y dado que $T(y)=\mu y$ y con $\mu=\dfrac{1}{\lambda}$ el auto valor de T es el reciproco de el auto valor de L y la auto funcion de T es la (clase de equivalencia) auto funcion de L

Analicemos el siguiente teorema, que nos aclarará sobre el analisis de las soluciones

2 8 El TEOREMA DE ALTERNATIVA

ı) La ecuacıon (2 7 2) tıene la sola solucıon nula $(\Delta(y) \neq 0)$ entonces

$(I-\lambda T)([y])=[F]$ tıene una y solo una solucıon $F \in L^2(I)$

(en partıcular $L(y)-\lambda y = f$ tıene una sola una solucıon para toda $f \in C(I)$

ıı) La ecuacıon (2 7 2) tıene una solucıon no nula $(\Delta(y)=0)$ y entonces

$(I-\lambda T)([y])=[F]$ con $F \in L\ (I)$ tıene solucıones (en partıcular $L(y)-\lambda y = f$ con $f \in C(I)$ tıene solucıones) sı y solo sı

$\int_I F(\varepsilon)\overline{Z}(\varepsilon)d\varepsilon = 0$ $\left(\int_I \int_I G(\varepsilon\ t)F(\varepsilon)\overline{Z}(\varepsilon)d\varepsilon dt = 0\right)$ para cada z talque

$$\left(T\ -\overline{\mu}\right)(z)=0$$

Recordemos el ultımo ejemplo tratado Sı hallamos que el operador T $T(f)(x)=\int G(x\ \varepsilon)f(\varepsilon)d\varepsilon$ es un operador de Hılbert Schmıdt ınvertıble como sus auto valores son ınversos de los auto valores del operador L y estos son todas posıtıvos sı $\phi_1\ \phi_2$ son las auto funcıones ortonormalızadas del operador L resulta

$$G(x\ \varepsilon)=\sum_k \frac{1}{\lambda_k}\phi\ (x)\overline{\phi_k(\varepsilon)}$$

La serıe converge absolutamente e unıformemente debıdo al Teorema de Mercer por que G es definıdo posıtıvo

Sı $f \in D$ ahora f es la transformacıon a traves de T de un elemento de $L^2(I)$ y por el teorema de Hılbert Schmıdt resulta $F_{(\ )} = \sum_k < F\ \phi_k > \phi_k(x)$ la serıe converge absolutamente e unıformemente

Por ejemplo sea

$$\left\{\begin{array}{l} L(y) = -y \\ D = \left\{ y \in C^{(\ )}\left([o\ \pi]\right) \middle| y(0) = y(\pi) = 0 \right\} \end{array}\right\}$$

La integral general de $L(y) = \lambda y$ es $y = C\,Cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + C\ Sen\left(\sqrt{\lambda}x\right)$

las condiciones de frontera, requieren que sea $C\ = 0$ y $\lambda = n^2\ n = \pm 1\ \pm 2$

por lo tanto las auto funciones ortonormalizadas de L son $\frac{\sqrt{2}}{\pi} Sen\left(nx\right)\ n = 1\ 2$ constituyendo un sistema ortonormal completo para $L^2\left([0\ \pi]\right)$

CAPITULO TERCERO

ECUACIONES INTEGRALES DE FREDHOLM

III ECUACIONES INTEGRALES DE FREDHOLM

Segun las clasificaciones de las ecuaciones de Fredholm tenemos la de primer tipo que es de la forma.

$$\int_a^b k(x\ y)\phi(y)dy = f(x)$$

Por otro lado sea $k\ (x\ \ y)$ una funcion continua de valor complejo definida en un dominio $a \le x \le b\ \ a \le y \le b\ \ f(x)$ una funcion continua de valor complejo definida en el intervalo $a \le x \le b$ y λ un parametro complejo Consideremos una ecuacion con la funcion desconocida $\phi(x)$ de la forma

$$f(x) = \phi(x) - \lambda\int_a^b k(x\ y)\phi(y)dy$$

Esta ecuacion se llama ecuacion integral de Fredholm de segunda clase o de segundo orden

Trataremos de encontrar una solucion continua $\phi(x)$ de la ecuacion de Fredholm de segunda clase

Tambien se da la ecuacion de Fredholm de tercer tipo

$$a(x)\phi(x) - \lambda\int_a^b k(x\ y)\phi(y)dy = f(x)$$

Esta puede pasar a segundo tipo si dividimos la ecuacion por $a(x)$

3 1 Conexion con la Teoria de Ecuaciones Diferenciales Lineales

Asi como una ecuacion diferencial

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x)y = F(x) \qquad (1)$$

Con las condiciones iniciales clasicas

$$y(0) = C$$
$$y\ (0) = C$$
$$(2)$$
$$y^{(\ \ 1)}(0) = C_{\ \ 1}$$

lleva a la ecuacion integral de **Volterra** la misma ecuacion con condiciones iniciales en ambos puntos finales $x=0$ y $x=1$ del intervalo basico (0 1) lleva generalmente a una ecuacion integral del tipo Fredholm

Una clase muy general de tales condiciones se obtiene requiriendo que combinaciones lineales n de cantidades $2n$

$$y(0)\ y\ (0)\qquad y^{(\ \ 1)}(0)$$
$$y(1)\ y\ (1)\qquad y^{\ \ 1)}(1)$$

asume valores prescritos pero requeria que

$$\sum a_{h\ k} y^{k}(0) - \sum b\quad y^{k}(1) = c_{h}\qquad (h=0\ 1\quad n)\qquad (3)$$

donde $a_{h,k}$, $b_{h\ k}$ y c_h son constantes dadas Obviamente excluimos el caso donde todos los $a_{h\ k}$ y $b_{h,k}$ desaparecen por la misma h Podemos suponer sin embargo que $c_0=c_1=\ \ =c_{h\ 1}$ entonces podemos considerar sin perdida de generalidad las condiciones de limite homogeneas

$$\sum a_{\ \ k} y^{k}(0) = \sum b_{h\ k} y^{k}(1) = c_{h}\quad (h=0\ 1\qquad n\ 1)\qquad (4)$$

Esto es claro porque si $y(x)$ es una solucion de (1) satisfaciendo condiciones de limite (3) y $f_0(x)$ es cualquier funcion (diferenciable n veces) satisfaciendo (3) y si $y(x)=f_0(x)+y(x)$ entonces $y(x)$ satisface condiciones homogeneas (4) y la ecuacion diferencial (1) con solo el lado derecho (generalmente) cambiado

A la ecuacion (1) mas las condiciones de limite (4) se le llama Sistema Liouville Tal sistema es equivalente a una ecuacion integral Fredholm de la segunda clase con un nucleo bastante manejable Podemos confinarnos aqui al caso mas importante $n = 2$ En este caso desaparece cierta dificultad formal

La dificultad que aparece para $n = 2$ es la necesidad de considerar junto con la ecuacion (1) su adjunto porque una ecuacion diferencial lineal del segundo orden puede ser siempre hecha **auto – adjunta** Para ser preciso bajo la hipotesis usual que $A_0(x) \neq 0$ esto se puede hacer multiplicando la ecuacion (1) (en el caso $n = 2$) por $\frac{p(x)}{a\ (x)}$ donde

$$P(x) = Exp \int \left[\frac{a_1(x)}{a\ (x)} \right] dx > 0 \tag{5}$$

suponemos mas alla que $F(x)=0$ (que no es restriccion esencial) y asi obtenemos la ecuacion auto – adjunta

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx} \right] + q(x)y = 0 \tag{6}$$

donde $$q(x) = p(x)\frac{a\ (x)}{a\ (x)} \tag{7}$$

La ecuación (6) se le llama auto adjunta porque si denotamos por L[y(x)] el operador diferencial que es

$$L[y(x)] = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy(x)}{dx} \right] + q(x)y(x) \tag{8}$$

el lado izquierdo de (6) entonces tenemos identicamente

$$\{z(x)L[y(x)] - y(x)L[z(x)]\} = \frac{d}{dx}\left\{ P(x)\left[z(x)\frac{dy(x)}{dx} - y(x)\frac{dz(x)}{dx} \right] \right\} \tag{9}$$

(En el caso de una ecuacion no auto adjunto una identidad similar requiere el uso de 2 operadores diferenciales L y M en la izquierda)

Las condiciones de limite (4) se pueden escribir en la forma simple

$$a_h[y(0)]=b_h[y(1)] \qquad (h=0\ 1) \tag{10}$$

Si introducimos los operadores diferenciales

$$a_h[y(x)]=a_h\, y(x)+a_h(y\ (x)) \quad b_h[y(x)]=b_h y(x)+b_h y\ (x)$$

y las abreviaturas $a_l\,[y(x_0)=\{a_h[y(x)]\}$ $\qquad b_h[y(x_0)]\equiv b_h[y(x)]\}$

Generalmente el sistema Sturm – Liouville (6) + (10) tiene solamente la solucion trivial $y(x)=0$ porque $y_1(x)\ y_2(x)$ es un conjunto fundamental de soluciones de (6) y escribimos su solucion general en la forma $\qquad y(x)= c_1 y_1(x)+ c_2 y_2(x)$

entonces la determinación de las constantes $C_1\ C_2$ de acuerdo a condiciones de limite (10) lleva al sistema algebraico homogeneo

$$c\,\{a_0[y_1(0)]-b_0[y_1(1)]\}+c_2\,\{a_0[y_2(0)]-b_0[y_2(1)]\}=0$$

$$c_1\,\{a_1[y_1(0)]-b_1[y_1(1)]\}+c_2\,\{A_1[y_2(0)]-b_1[y_2(1)]\}=0$$

que generalmente tiene solo la solucion $c_1=c_2=0$ por que en general

$$\Delta=\begin{pmatrix} a\ [y_1(0)]-b_0[y\ (1)] & a_0[y\ (0)]-b_0[y_2(1)] \\ a_1[y_1(0)]-b\ [y\ (1)] & a_1[y\ (0)]-b\ [y\ (1)] \end{pmatrix}\neq 0 \tag{11}$$

En vez de considerar el sistema (6) + (10) debemos considerar un sistema ligeramente diferente que consiste de condiciones de limite (10) y una ecuacion diferencial modificada (que contiene un parametro λ)

$$L[y(x)]+\lambda r(x)y(x)=\frac{d\left[p(x)\dfrac{dy}{dx}\right]}{dx}+[q(x)+\lambda r(x)]y=0 \tag{12}$$

Nos preguntamos ¿ para que valores del parametro el sistema Sturm Liouville

(12) + (10) no tiene soluciones no triviales?

El estudio de esta pregunta es de importancia fundamental en muchos problemas de Fisica, Matematica, Mecanica, etc puede ser reducida al estudio de la ecuacion integral homogenea de Fredholm de la segunda clase Para hacer esto usaremos la Formula de Green (3 4) y la Funcion de Green para el sistema (6) + (10)

La Función de Green $G(x\ \varepsilon)$ es una funcion de x y un parámetro ε

($0 < \varepsilon < 1$) que satisface tres condiciones

i) $G(x,\varepsilon)$ considerada como una funcion de x satisface la ecuacion

diferencia (6) en todos los puntos del intervalo (0 1) excepto en el punto

$x = \varepsilon$

ii) $G(x\ \varepsilon)$ satisface ambas condiciones de limite (10)

iii) Aunque $G(x\ \varepsilon)$ es continua en $0 \le x \le 1$ su derivada $G\ (x\ \varepsilon)$ con respecto a x es continua solo para $0 \le x \le \varepsilon$ y $\varepsilon < x \le 1$ y tiene un salto de discontinuidad de $\dfrac{1}{p(\varepsilon)}$ en $x = \varepsilon$

De modo que

$$G\ (\varepsilon + 0\ \varepsilon) - G\ (\varepsilon - 0\ \varepsilon) = \frac{-1}{p(\varepsilon)} \tag{13}$$

Ahora si podemos determinar el conjunto fundamental $y_1(x)\ \ y_2(x)$ de la ecuacion (6) entonces podemos construir la función de Green

Sea $G(x\ \varepsilon) = \ c_1(\varepsilon)\, y_1(x) + c_2(\varepsilon)\ y_2(x) \qquad (\, 0 \le x \le \varepsilon\,)$

$$d_1(\varepsilon)\, y_1(x) + d_2(\varepsilon)\ y_2(x) \qquad (\ \varepsilon < x \le 1\,)$$

donde $c_1(\varepsilon)$ $c_2(\varepsilon)$ $d_1(\varepsilon)$ y $d_2(\varepsilon)$ son 4 funciones desconocidas de ε, que pueden ser determinadas por las condiciones de limite (10) y la condicion de continuidad

$$G(\varepsilon+0\ \varepsilon)=G(\varepsilon\ 0\ \varepsilon) \qquad (14)$$

Estas 4 ecuaciones nos dan el sistema algebraico no homogeneo

$$c_1(\varepsilon)a_0[y_1(0)] + c_2(\varepsilon)a_0[y_2(0)] \quad d_1(\varepsilon)b_0[y_1(1)] - d_2(\varepsilon)b_0[y_2(1)] = 0$$

$$c_1(\varepsilon)a_1[y_1(0)] + cC_2(\varepsilon)a_1[y_2(0)] \quad d_1(\varepsilon)b_1[y_1(1)] - d_2(\varepsilon)b_1[y_2(1)] = 0$$

$$c_1(\varepsilon)\, y_1(\varepsilon) \quad c_2(\varepsilon)\, y_2(\varepsilon) + d_1(\varepsilon)\, y_1(\varepsilon) + d_2(\varepsilon)\, y_2(\varepsilon) = 0$$

$$c_1(\varepsilon)\, y_1(\varepsilon) \quad c_2(\varepsilon)\, y_2(\varepsilon) + d_1(\varepsilon)\, y_1(\varepsilon) + d_2(\varepsilon)\, y_2(\varepsilon) = \frac{-1}{p(\varepsilon)}$$

cuyo determinante es igual a $\begin{pmatrix} y_1(\varepsilon) & y\ (\varepsilon) \\ y_1(\varepsilon) & y\ (\varepsilon) \end{pmatrix}\Delta$ de modo que por virtud de (11) no se anula

Por ejemplo la funcion de Green para el sistema de Sturm Liouville

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda r(x) y = 0$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

Un eje que vibra por torsión son posibles diferentes condiciones en los extremos, las cuales requieren tratamiento matematicos un tanto diferentes mientras que una cuerda tensa debe tener necesariamente fijo cada uno de sus extremos

3 2 TEOREMA DE LA ALTERNATIVA DE FREDHOLM U OPCIONES DEL TEOREMA

Primero tenemos el caso cuando $\int_a^b \int_a^b |k(x\ y)|\ dxdy < 1$ de manera que para simplificar tomamos $\lambda = 1$ y consideramos la ecuacion

$$\phi(x) - \int \quad k(x \quad y)\phi(y)dy = f(x) \tag{3 2 1}$$

Una ecuacion para la función desconocida $\phi(y)$ es de la forma

$$\Psi(y) \quad \int_a^b k(x \ y) \ \Psi(x) \, dx = g(y) \tag{3 2 2}$$

donde $g(y)$ es una funcion continua dada en el intervalo $a \leq x \leq b$ y se llama funcion conjugada de (3 2 1) es decir de $f(x)$

TEOREMA 3 2 1 Bajo la suposicion $\int_a^b \int_a^b |k(x \ y)| \, dxdy < 1$ (3 2 3)

Las ecuaciones (3 2 1) y (3 2 2) admiten una y solo una solución

$\Phi(x)$ $[\Psi(y)]$ para cualquier $f(x)$ $[g(y)]$

En particular $\Phi(x) = 0$ $[\Psi(y) = 0]$ para la ecuacion homogenea

$$\Phi(x) - \int_a^b k(x \ y)\phi(y)dy = 0 \tag{3 2 4}$$

$$\psi(y) - \int_a^b k(x \ y)\psi(x)dx = 0 \tag{3 2 5}$$

Comprobacion considerando el nucleo $k(x \ y)$ definimos el nucleo iterado

$k(x \ y) \ k^2(x \ y) \ k^3(x \ y) \qquad k(x \ y)$ asi

$$k(x \ y) = k(x \ y)$$

$$k^2(x \ y) = \int_a^b k(x \ y)k(z \ y)dz$$

$$=$$

$$k(x \ y) = \int_a^b k(x \ z)k^{\ 1}(z \ y)dz \tag{3 2 6}$$

La siguiente relación es valida y se cumple para el nucleo iterado

$$k \quad (x \ y) = \int_a^b k(x \ z)k^{m}(z \ y)dz \tag{3 2 7}$$

por (3 1 6) y la desigualdad de Schwarz

Tenemos $\left|k \ (x \ y)\right| \leq \int_a^b \left|k(x \ z)\right| \ dz \int_a^b \left|k \quad (z \ y)\right| \ dz$

Luego $\int_a^b \int_a^b \left|k \ (x \ y)\right| \ dxdy \leq \int_a^b \int_a^b \left|k(x \ z)\right| \ dxdz \int_a^b \int_a^b \left|k \ ^1(z \ y)\right| \ dzdy$

$Por \tan to \int_a^b \int_a^b \left|k \ (x \ y)\right|^2 dxdy \leq \int_a^b \int_a^b \left|k(x \ y)\right| \ dxdz \int_a^b \int_a^b \left|k \quad (x \ y)\right|^2 dzdy$

Repitiendo este proceso finalmente obtenemos

$$\int_a^b \int_a^b \left|k \ (x \ y)\right| \ dxdy \leq \left[\int_a^b \int_a^b \left|k(x \ y)\right|^2 dxdy \right] \qquad (3\ 2\ 8)$$

Por otro lado de acuerdo con (3 1 6) y (3 1 7) vemos que para z ≥ 3

$$k \ (x \ y) = \int_a^b k(x \ z)k \quad (z \ z \ )k(z_1 \ y)dzdz$$

Como consecuencia de lo anterior establecemos para la desigualdad de Schwarz

$$| \, k \ (x \ y) \, | \leq \int^b \int_a^b \left[| \, k \ ^2(z \ z_1) \, | \ dzdz \ \int_a^b \int_a^b | \, k(x \ z)k(z \ y) \, |^2 \ dz dz \right]$$

Por lo tanto haciendo uso de (3 1 8) obtenemos

$$| \, k \ (x \ y) \, | \leq \left[\int_a^b \int_a^b | \, k(x \ y) \, | \ dxdy \right] \ \left\{ \int^b | \, k(x \ z) \ dz \int_a^b | \, k(z \ y) \, | \ dz \right\}$$

El termino en el lado derecho es continuo en el dominio $a \leq x \leq b \quad a \leq y \leq b$ y de acuerdo con la suposición (3 2 3) las series

$$R(x \ y) = \sum_1^{\infty} k \ (x \ y) \qquad (3\ 2\ 9)$$

convergen uniformemente en el dominio $a \leq x \leq b$

De modo que por la integracion de término por término y por el uso de (3 2 7) obtenemos

$$R(x \ y) = k(x \ y) + \int_a^b k(x \ z)R(z \ y)dz \qquad (3\ 2\ 10)$$

$$R(x \ y) = k(x \ y) + \int_a^b R(x \ z)k(z \ y)dz \qquad (3\ 2\ 11)$$

las series (3 2 9) se conocen como las series de Newman para el nucleo $k(x\ y)$

Ahora, utilizando (3 2 10) podemos demostrar que

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^b R(x\ y) f(y) dy \qquad (3\ 2\ 12)$$

satisface la ecuacion (3 2 1)

En realidad, sustituyendo (3 2 12) en (3 2 1) y usando (3 2 10) tenemos

$$\phi(x) - \int_a^b k(x\ y)\phi(y)dy$$

$$= f(x) + \int_a^b R(x\ y) f(y)dy - \int_a^b k(x\ y)\left\{f(y) + \int_a^b R(y\ z) f(z)dz\right\}dy$$

$$= f(x) + \int_a^b \left\{R(x\ y) - k(x\ y) - \int_a^b k(x\ y)R(z\ y)dz\right\} f(y)dy = f(x)$$

Es posible probar que si $\phi(x)$ satisface la ecuacion (3 2 1) entonces $\phi(x)$ satisface (3 2 12) Para la cual sustituimos

$f(x) - \phi(x) - \int_a^b k(x\ y)\phi(y)dy$ (3 2 12) y usando (3 2 11) como sigue

$$\phi(x) - \int_a^b k(x\ y)\phi(y)dy + \int_a^b R(x\ y)\left\{\phi(y) - \int_a^b k(y\ z)\phi(z)dz\right\}dy$$

$$= \phi(x) + \int_a^b R(x\ y) - k(x\ y) - \int_a^b R(x\ z)k(z\ y)dz\{\phi(y)dy\}$$

$$= \phi(x)$$

Asi (3 2 1) es equivalente a la (3 2 12)

Igualmente podemos probar que la ecuacion conjugada de (3 2 1) es equivalente a la ecuacion

$$\psi(y) = g(y) + \int_a^b R(x\ y) g(x)dx \qquad (3\ 2\ 13)$$

Observacion Tenemos que tener en cuenta que bajo la suposicion (3 2 3) cada solucion $\phi(x)$ de la ecuación (3 2 1) esta dada por (3 2 12) mediante el nucleo $R(x\ y)$

y cada solucion $\psi(y)$ de la ecuacion conjugada (3 2 2) está determinada por (3 2 13) mediante el nucleo conjugado $R^{1}(x\ y)$ de $R(x\ y)$ definido por

$$R\ (x\ y) = R(x\ y) \qquad (3\ 2\ 14)$$

Por esta razon, los nucleos $R\ (x\ y)$ y $R^{1}(x\ y)$ son llamados nucleos resolventes de las ecuaciones (3 2 1) y (3 2 2) respectivamente

El Teorema anterior prueba que 1 no es valor propio de cualquier nucleo

$k\ (x\ y)$ o nucleo conjugado $k\ (x\ y)$

$$k\ (x\ y) = k\ (x\ y) \qquad (3\ 2\ 15)$$

3 3 TEOREMA DE LA ALTERNATIVA DE FREDHOLM CON RESPECTO AL NUCLEO

Los resultados obtenidos en la parte 3 2 1 y 3 2 2 son conocidos como Teorema de la alternativa de Fredholm concernientes al nucleo continuo $k(x\ y)$ en el dominio

$a \le x \le b\ \ a \le y \le b$

TEOREMA (3 3 1) Una ecuacion integral de segunda clase

$$f(x) = \phi(x) - \lambda \int^{b} k(x\ y)\phi(y)dy \qquad (3\ 3\ 1)$$

con λ fijo y $f(x)$ funcion continua admite una unica solucion continua $\phi(x)$ o la ecuacion homogenea asociada

$$\overline{\phi(x)} = \lambda \int^{b} k(x\ y)\overline{\phi(y)}dy \qquad (3\ 3\ 2)$$

admite un numero z $(z \ge 1)$ de soluciones continuas independientes lineales

$\overline{\phi}_1(x)\ \overline{\phi}_2(x) \qquad \overline{\phi}\ (x)$

En el primer caso la ecuacion conjugada

$$g(x) = \psi(x) - \lambda \int^{b} k(y\ x)\psi(y)dy \qquad (3\ 3\ 3)$$

Tambien admite una unica solucion $\psi(y)$ para cualquier función continua $g(x)$

En el segundo caso la ecuacion homogénea asociada

$$\overline{\psi(x)} = \lambda \int_a^b k(y\ x)\overline{\psi(y)}dy \tag{3 3 4}$$

admite un numero z de soluciones continuas linealmente independientes

$\overline{\psi_1}(x)\ \overline{\psi_2}(x) \qquad \overline{\psi}\ (x)$

En el segundo caso la ecuacion (3 3 3) admite una solución si y solamente si

$$\int_a^b f(x)\overline{\psi_j}(x)dx = 0 \qquad (j=1\ 2 \qquad z) \tag{3 3 5}$$

Si la condicion (1 3 5) se satisface la solucion general de (1 3 1) se escribe asi

$$\phi(x) = \phi^{(1)} + \sum_{j\ 1} c_j\overline{\psi_j}(x) \tag{3 3 6}$$

por medio de una solucion particular $\psi^{(\,)}(x)$ de (3 3 5) y z constantes arbitrarias c_1 c c Igualmente la ecuacion conjugada (3 3 6) admite una solucion si y solamente si

$$\int_a^b g(x)\overline{\phi_j}(x)dx = 0 \qquad (j = 1\ 2 \qquad z) \tag{3 3 7}$$

partiendo de que la (3 3 7) se satisface la solucion general (3 3 6) se formula como

$$\psi(x) = \psi^{(\,)}(x) + \sum_j c_j\overline{\psi_j}(x) \tag{3 3 8}$$

Por medio de una solucion particular $\psi^{(\,)}(x)$ de (3 3 5) y z constantes arbitrarias

$c_1\ c_2 \qquad c$

Observacion Este teorema establece que existe una unica solucion de (3 3 2) para cualquiera funcion continua $f(x)$ si y solamente si λ no es un valor propio

El nucleo asimetrico

$$k(x\ y) = \sum_k (k)\ \ senkxsen(k+1) \tag{3 3 9}$$

y definido en el dominio $0 \le x \le 2\pi$ $0 \le y \le 2\pi$ no tiene valor propio

En efecto puesto que la serie (3 3 9) converge uniformemente obtenemos por integracion termino a término que el nucleo repetido $k^{(\ )}(x\ y)$ esta dado por

$k^{(\ )}(x\ y) = \sum_{k\ 1} \pi^{\ 1}\left[k\ (k+1)^2 + \quad + (k+n-1)^2\right]^{1} SenkxSen(k+n)$ y entonces la serie Newman $\sum^{\infty} \lambda\ k^{(\ )}(x\ y) = R(x\ y\ \lambda)$ converge uniformemente en el dominio $0 \le x \le 2\pi$ $0 \le y \le 2\pi$ para cualquier λ Por tanto para cualquier λ, la ecuacion

$$f(x) = \phi(x) - \lambda \int_a^b k(x\ y)\phi(y)dy$$

siempre posee una unica solución $\phi(x) = f(x) + \int_a^b R(x\ y\ \lambda) f(y)dy$

3 4 OPERADORES INTEGRALES

Sea J=[a, b] un intervalo compacto y supongamos que $k\ \ [a\ b]x[a\ b] \to R$ (k = nucleo) que es una funcion continua

Sea $X = C([a\ b]\ \ R)$ el espacio normado con la norma $\|\phi\|_\infty = \sup\{\phi(t) / t \in [a\ b]\}$

Definamos el Operador $K\ \ X \to X$ como

$$(K\phi)_{(\ )} = \int_a^b k(x\ t)\phi(t)dt$$

el cual transforma cada funcion continua ϕ en una funcion continua $K\phi$

3 4 1 Nucleos Degenerados Existen clases de ecuaciones de Fredholm que se pueden ver por los metodos normales de álgebra lineal Tal es el caso de las ecuaciones de segundo orden

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b k(x\ y)\phi(y)dy = f(y) \tag{3 4 2}$$

donde

$$k(x\ y) = \sum a_j(x)b_j(y) \tag{3 4 3}$$

Los nucleos mostrados en (3 4 2) se llaman degenerados

Las funciones $a_j(x)$ y $b_j(x)$ pertenecen a L_2 [a, b] asi que $k(x\ y)$ es de cuadrado integrable Asumimos que el conjunto de funciones $(a_j(x))$ son linealmente independientes

Analogamente con respecto al conjunto $(b_j\ (y))$

Si (3 4 3) es remplazada en (3 4 2) se obtiene

$$\phi(x) - \lambda \sum_j a_j(x) \int_a^b b_j(y)\phi(y)dy = f(x) \tag{3 4 4}$$

Si se denota $\int_a^b b_j(y)\phi(y)dy$ por z_j y multiplicamos (3 4 4) por $b_j(x)$ e integramos tendremos

$$z - \lambda \sum_j a_j z_j = f \quad \text{i=1 2} \quad \text{n} \tag{3 4 5}$$

donde $a = \int_a^b a(x)b_j(x)dx$ y $\int_a^b f(x)b(x)dx = f$

La ecuacion (3 4 5) es un sistema de n-ecuaciones algebraicas lineales en n incognitas z_1 z z este sistema tiene soluciones Se puede resolver inmediatamente y encontrar

$$\phi(x) = f(y) + \lambda \sum_i z\, a(x) \tag{3 4 6}$$

La ecuacion (3 4 4) tendra una solucion unica para toda $f(x)$ si y sólo si tiene una solucion unica para toda (f)

Esto se dara solo si $|I \quad \lambda A| \neq 0$ donde la matriz $A = (a_{ij})$ (3 4 7)

Puesto que $|I \quad \lambda A|$ es un polinomio de grado n hay a lo sumo n valores de λ

Para cada una de estas (3 4 4) y (3 4 5) fallan de tener soluciones unicas

Ahora estudiaremos cuando (3 4 7) no se satisface para ello examinaremos la ecuacion homogenea asociada con (3 4 4)

$$\psi(x) = \overline{\lambda}\sum_{j\ 1} \overline{b_j}(x)\int_a^b \overline{a}\,(y)\psi(y)dy = 0 \qquad (3\ 4\ 8)$$

Como en el caso de la no homogenea esta ecuacion se puede reducir a una algebraica Si $\int_a^b \psi(x)\overline{a_i}(x)dx = w$ multiplicando (3 4 8) por $a\,(x)$ e integrando se tiene

$$w_i - \lambda\sum_{j\ 1} \overline{a_j} w_j = 0 \qquad i = 1\ 2 \qquad n \qquad (3\ 4\ 9)$$

Si (3 4 9) tiene una solucion no trivial la funcion

$$\psi(x) = \overline{\lambda}\sum_{j\ 1} w\,\overline{b}\,(x) \qquad (3\ 4\ 10)$$

satisface (3 4 8)

Ahora aplicando (3 4 4) y (3 4 7) si $|I \quad \lambda A| = 0$ para algun valor λ_j la (3 4 3) tendra soluciones no triviales luego (3 4 4) tendra soluciones solo para aquella *fi* que satisfacen

$$\sum_{1} f\,\overline{w} = 0 \qquad (3\ 4\ 11)$$

donde los w satisfacen (3 4 9)

Considerando el producto interno

$$(f\ \psi) = \int_a^b f(x)\overline{\psi}(x)dx = \lambda\sum \overline{w}\ \int_a^b f(x)b\ (x)dx$$

$$= \lambda\sum_{1} f\ \overline{w}$$

3 5 FORMULA DE GREEN Probablemente uno de los aspectos mas interesantes de la teoria de las ecuaciones diferenciales de Sturm Liouville es la existencia de la Formula de Green La derivacion de la Formula de Green se basa en la propiedad de las ecuaciones S L de ser auto adjunta o simetrica, lo que permite conectar esta teoria con los resultados que se obtienen a partir de la teoria de operadores auto adjuntos en espacios de Hilbert Para tal fin la expresion diferencial de Sturm Liouville (2 1) toma la forma (2 1 9) considerando el operador diferencial L como un operador auto adjunto en un espacio de Hilbert

De esta manera trataremos con la ecuacion $L[\psi] = \lambda\psi$ que es una ecuación de valor caracteristico donde λ es el valor caracteristico y ψ es la funcion caracteristica

La fórmula de Green se obtiene mediante un proceso parecido a la integracion por partes Quedando una expresión que relaciona una integral que incluyen las soluciones de una ecuacion diferencial con sus valores a la frontera

$$\int_a^b \varphi\ [\psi] - L\left[\overline{\varphi}\right]\ \psi\, dx = [\varphi\ \psi]^b \qquad (3\ 5\ 1)$$

en donde el parentesis cuadrado que se tiene indicado del lado derecho se define como

$$[\varphi\ \psi](x) = p(x)\left[\varphi\ (x)\psi^1(x) - \varphi\ \ (x)\psi(x)\right] \qquad (3\ 5\ 2)$$

La Formula de Green toma su mayor expresion cuando se aplica a las auto funciones del operador diferencial del cual esta se derivo

Supongase que se tienen un par de auto funciones φ y ψ

$$L[\varphi]=\lambda\varphi \quad L[\psi]=\mu\psi \tag{3 5 3}$$

entonces se obtiene $(\mu-\lambda\ )\int_a^b \varphi\ \psi dx=[\varphi\ \psi](b)-[\varphi\ \psi](a)$ (3 5 4)

En el lado ızquıerdo la ecuacıon anterıor muestra una forma bılıneal que es un tıpıco producto ınterno en el espacıo de funcıones En el lado derecho los parentesıs cuadrados representa otra forma bılıneal pero en el espacıo de valores a la Frontera

$$(\varphi\ \psi)=\frac{[\varphi\ \psi](b)-[\varphi\ \psi](a)}{\mu-\lambda} \tag{3 5 5}$$

Un caso partıcularmente ımportante resulta cuando $\lambda\ =\mu$ lo cual ocurre cuando ambas funcıones caracterıstıcas ϕ y ψ pertenecen al mısmo valor caracterıstıco

En tal caso el lado ızquıerdo de la ecuacıon usa un producto ınterıor real en el espacıo solucıón en el cual no ımporta sı este tıene un multıplıcador cero de la forma (λ λ) La versıon real de los parentesıs cuadrados pertenecıentes a un operador dıferencıal de segundo orden es el Wronskıano de las solucıones

$$W[\varphi\ \psi]=[\varphi\quad \psi] \tag{3 5 6}$$

obtenıendose para funcıones caracterıstıcas pertenecıentes al mısmo valor caracterıstıco de L el sıguıente resultado

$$W[\varphi\ \psi](a)=W[\varphi\ \psi] \tag{3 5 7}$$

La propıedad mas ımportante del Wronskıano de un operador auto adjunto es su constancıa

La mayor parte de las ecuacıones dıferencıales parcıales que se encuentran en las aplıcacıones elementales en la ıngenıerıa y la fısıca, conduce dırectamente al corazon de la rama de las matematıcas que trata de los problemas con valor en la frontera

El metodo de separacion de variables hace que un problema nuevo dependa de otro ya conocido En este caso se intenta convertir la ecuacion diferencial parcial dada en varias ecuaciones diferenciales ordinarias

BIBLIOGRAFIA

Bombal Fernando Los Origenes del Analisis Funcional 1995

F G Tricomi Equazioni Differenziali Tercera Edicion Editora Paolo Boringhieri 1961 Turin

F G Tricomi Integral Equations Edited by R. Courant. L Bers J Stoker Second Printing 1963

Helmerberg Gilbert Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space Editors H A. Lauwerier W T Kotter Second printing 1975

Honig Chaim Samuel Analise Funcional e o Problema de Sturm Liouville. Editora Edgar Blucher Ltda Editora Da Universidade de Sao Paulo 1978

Kreider Donald Kuller Robert Ostberg Donald Perkins Fred Introduccion al Analisis Lineal I II Fondo Educativo Interamericano S A. Mexico 1971

Lambe C G Jhvanter C Ecuaciones Diferenciales para Ingenieros y Cientificos Unión Tipografica Editorial Hispano Americana Mexico D F 1964

Pini Bruno (1994) Terzo Corso di Analisi Matematica cap 2 Generalita sugli operatori lineari traspazi normati Operatori compatti Vol 2 Clueb Bologna 1978

Sotomayor Jorge Licoes de Equacoes Diferenciais Ordinarias (IMPA) Instituto de Matematica Pura e Aplicada Cnpq 1979

Spiegel Murray R Ecuaciones Diferenciales Aplicadas Editorial Prentice Hall Hispanoamericana S A Mexico 1983

Zill Dennis G Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones

Grupo Editorial Iberoamérica 1988

http //pt.wikipedia org/wiki/Teoria_de Sturm_Liouville

http //mazinger sisib uchile cl/repositario lap/ciencias_quimicas_y_farmaceutic

http //www branchingnature org/Aportes/Elementos / 29de / 20 operadores
http //www tecnun es/asignaturas/metmat/texto/

http//www fi uba ar/materias/61101/Guias/P09Adic1 / 20Sturm_Liouville pdf

http //www ceit,es/asignaturas/matmat/texto/en_web/problemas_de_contorno/problema
http //www pdffactory com

http//www unex es el problema de Sturm Liouville